MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL†

63. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 5. JANUAR 1956)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

63. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Behrend, F. A., A Contribution to the Theory of Magnitudes and the Foundations of Analysis 345

Siegel, C. L., Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen 363

Freudenthal, H., Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems 374

Brauer, R., Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung 406

Behrend, F. A.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 345—362 (1956)

A Contribution to the Theory of Magnitudes and the Foundations of Analysis

In memoriam Issai Schur

By

F. A. Behrend

The main aim of this paper is to advocate a simultaneous development of the theory of magnitudes and the foundations of analysis.

Part I is an attempt to combine and simplify the axiomatic treatment of magnitudes and their measurement by real numbers as given by Hölder[1]), Bourbaki[2]), Zassenhaus[3]) and the author[4]). The main features of the system of axioms proposed in § 1.2 are: (1) The axioms apply to magnitudes, like lengths, with an unrestricted addition as well as to cases with restricted addition, e.g. to angles, or physical magnitudes with a restricted range of accessibility. (2) The inverse law and the positive law are assumed in the one-sided forms $(A_2^* r)$, $(AO_1 r)$ only. This permits the application of the axioms to irreversible magnitudes, like time intervals, which can only be laid off in one direction; in this case the equation $\alpha+\xi=\beta$ is solved by laying off α and β from the same initial point, but $\xi+\alpha=\beta$ cannot be solved similarly as α, β cannot be laid off from the same end-point; $\alpha<\alpha+\beta$ is a 'natural' law, $\beta<\alpha+\beta$ is not[5]). (3) The axioms are independent (§ 7). (4) The axioms guarantee the measurement of the magnitudes in the following precise sense: there exists an isomorphism (with respect to order and addition) of the magnitudes into the set of the positive real numbers; the map is uniquely determined by the choice of the unit (Theorem I, § 2).

However desirable and interesting, the theory of magnitudes, designed to elucidate the applicability of the real numbers, will be considered as a mere appendix to the foundations of analysis. But as is shown in Part II, the converse view is equally justified: the foundations of the real number system, including the exponential, logarithmic and trigonometric functions, may be regarded as a mere corollary to Theorem I (which therefore may well be styled the Fundamental Theorem of Analysis). The only background needed is a definition of the set $P^+(<,+)$ of the positive real numbers providing

[1]) Hölder, O.: Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Ber. Verh. kgl.-sächs. Ges. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl. **53**, I, 1—64 (1901).

[2]) Bourbaki, N.: Éléments de Mathématique, Livre III, Chap. V, § 2 (Mesure des grandeurs). Paris 1947.

[3]) Zassenhaus, H.: What is an angle? Amer. Math. Monthly **61**, 369—378 (1954).

[4]) Behrend, F. A.: A system of independent axioms for magnitudes. Proc. Royal Soc. N.S.W. **87**, 27—30 (1953).

[5]) For an axiomatic treatment of time see loc. cit. [4]), 29—30.

the main properties of order and addition. Any of the traditional definitions may be used (Theorem I gives the isomorphism of all definitions). We choose the school representation of the positive real numbers as infinite decimal fractions, as the most elementary definition available: it may be obtained directly from the theory of the non-negative integers, without intermediate introduction of the positive rational numbers (§ 3.1—3). Inspite of being didactically the most natural method, this definition is usually rejected as being to unwieldy for the treatment of multiplication; but Theorem I supplies the automorphism group of $P^+(<, +)$ and hence the multiplication in P^+ (§ 3.5). The set $P^+(<, \cdot)$ is then the prototype, in multiplicative form, of the additive set $P(<, +)$ of all real numbers, and may be used to define P and to obtain the order and addition properties in P (§ 4.1—2). An extension of Theorem I (Theorem II, § 4.3) then furnishes the endomorphisms of P defining multiplication in P (§ 4.4), and the homomorphisms of $P(<, +)$ into $P^+(<, \cdot)$ defining the exponential and logarithmic functions (§ 5). The trigonometric functions are obtained by applying Theorem I to the system of angles (defined as rotations or unimodular complex numbers) and deducing the homomorphism of the group P on the group U of rotations (§ 6)[6]).

This approach to the exponential, logarithmic and trigonometric functions is of course well-known in principle; but although it is carried out explicitly in Bourbaki[7]), it seems to have received little attention[8]), due, no doubt, to its being buried in too much topological background. The only topological tool used in the present exposition is Dedekind's section; the proof of Dedekind's law for the positive real numbers in decimal form takes only a few lines (§ 3.2); and the only essential use made of it is in the proof of Theorem I (§ 2.2); all the rest is pure algebra.

An Appendix contains proofs of the independence of a system of axioms for the positive real numbers (§ 7.1) and of the axioms of § 1.2 (§ 7.2), as well as a characterization, in terms of cyclic order, of the subgroups of the group U of rotations (§ 8).

I. Theory of Magnitudes

§ 1. Systems of magnitudes

1.1. Introduction

This section is concerned with (non-empty) sets $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ with

(i) *a relation* O: $\alpha < \beta$ (also written $\beta > \alpha$) is either true or false for any $\alpha, \beta \in \Sigma$,

---

[6]) For the sole purpose of developing the foundations of analysis, most of Part I is irrelevant as the commutative law in P^+ and U is trivial; all that is needed is (i) Theorem I for continua, (ii) Lemma I for the special case of U which can be obtained directly by representing the elements of U in the form $\mathfrak{i}^k\mathfrak{x}$ $(0 \leq k \leq 3)$ as in § 6.2 and then embedding U in the system of all formal expressions $\mathfrak{i}^n\mathfrak{x}$ on the lines of § 2.3.

[7]) loc. cit. [2]), Chap. V, § 4; VIII, § 2.

[8]) The response to several addresses on the subject, given in 1954, convinced me of this and encouraged the present publication in print.

(ii) *a (one-valued) operation A:* $\alpha+\beta$ is defined for some, not necessarily all, $\alpha, \beta \in \Sigma$; if $\alpha+\beta$ is always defined, Σ is called *complete*. From A we derive

(iii) *the operation N:* $n\alpha$ (n a natural number) is defined recursively, for some, not necessarily all, n by $1 \cdot \alpha = \alpha$, and $(n+1)\alpha = \alpha + n\alpha$ whenever $n\alpha$ and $\alpha + n\alpha$ are defined. If $n\alpha$ is not defined for all n, then n_α exists such that $n\alpha$ is defined for $n \leqq n_\alpha$, undefined for $n > n_\alpha$. We write $\beta \dot{<} n\alpha$ if either $n\alpha$ is undefined or $n\alpha$ is defined and $\beta < n\alpha$.

1.2. Systems

$\Sigma = \Sigma(<, +)$ is called a *system* (of magnitudes) if it satisfies the following axioms:

(O_1) For any α, β exactly one of $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ holds *(trichotomy law)*,

($A_1 r$) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ if the right hand side is defined *(right associative law)*,

($A_2^* r$) If $\alpha < \beta$, then ξ exists such that $\alpha + \xi = \beta$ *(restricted right inverse law)*,

($AO_1 r$) $\alpha < \alpha + \beta$ *(right positive law)*,

(Arch) to any α, β there exists k such that $\beta \dot{<} k\alpha$ *(law of Archimedes)*.

1.3. Consequences of the axioms

($AO_2 r$) If $\alpha+\beta'$ is defined and $\beta < \beta'$, then $\alpha+\beta$ is defined and $\alpha+\beta < \alpha+\beta'$ *(right monotonic law)*.

Proof. $\alpha+\beta' = \alpha+(\beta+\xi) = (\alpha+\beta)+\xi > \alpha+\beta$ by ($A_2^* r$), ($A_1 r$), ($AO_1 r$).

($AO_2' r$) $\alpha+\beta < \alpha+\beta'$ implies $\beta < \beta'$, $\alpha+\beta = \alpha+\beta'$ implies $\beta = \beta'$ *(right cancellation law)*.

Proof. (O_1), ($AO_2 r$).

($NA_1 r$) $m\alpha + n\alpha = (m+n)\alpha$ if the right hand side is defined.

Proof. Induction with respect to m, using ($A_1 r$).

(NO_1) If $n\alpha$ is defined and $m < n$, then $m\alpha < n\alpha$.

Proof. ($NA_1 r$), ($AO_1 r$).

(NO_1') $m\alpha < n\alpha$ implies $m < n$.

Proof. (O_1), (NO_1).

($A_1 l$) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ if the left hand side is defined *(left associative law)*.

Proof. Put $\alpha+\beta = \sigma$, $(\alpha+\beta)+\gamma = \tau$, then $\alpha < \sigma$, $\sigma < \tau$ by ($AO_1 r$). ($A_1 l$) will now be proved if one of the following conditions (i) to (iv) is satisfied.

(i) $\alpha < \tau$, i.e. $\alpha + \xi = \tau$, by ($A_2^* r$). $\alpha+\beta < \alpha+\xi$ implies $\beta < \xi$ by ($AO_2' r$), $\beta+\eta = \xi$ by ($A_2^* r$), whence $(\alpha+\beta)+\gamma = \tau = \alpha+(\beta+\eta) = (\alpha+\beta)+\eta$ by ($A_1 r$) and $\eta = \gamma$ by ($AO_2' r$).

(ii) μ exists such that $\alpha < \mu$, $\sigma < \mu$, $\tau < \mu$.

Using $(A_2^* r)$, $\mu = \tau + \xi = (\sigma + \gamma) + \xi = \sigma + (\gamma + \xi)$ by (i)
$= (\alpha + \beta) + (\gamma + \xi) = \alpha + (\beta + (\gamma + \xi))$ by (i)
$= \alpha + ((\beta + \gamma) + \xi) = (\alpha + (\beta + \gamma)) + \xi$ by $(A_1 r)$,

hence $\alpha + (\beta + \gamma)$ exists and is equal to τ by $(A_1 r)$.

(iii) Every ε which is the right hand term of a defined sum $\delta + \varepsilon$ satisfies $\varepsilon < \alpha$, $\varepsilon < \sigma$, $\varepsilon < \tau$.

γ is an ε, hence $\gamma < \alpha$, $\gamma + \alpha' = \alpha$, by $(A_2^* r)$, and $\sigma = (\gamma + \alpha') + \beta = \gamma + (\alpha' + \beta)$ by (i) as $\gamma < \sigma$; hence

$\tau = \sigma + \gamma = (\gamma + (\alpha' + \beta)) + \gamma = \gamma + ((\alpha' + \beta) + \gamma)$ by (i) as $\gamma < \tau$,
$= \gamma + (\alpha' + (\beta + \gamma))$, by (ii) as $\alpha', \alpha' + \beta, (\alpha' + \beta) + \gamma$ are ε's, hence $< \tau$,
$= (\gamma + \alpha') + (\beta + \gamma) = \alpha + (\beta + \gamma)$ by $(A_1 r)$.

(iv) There exists δ such that $n\delta$ is defined for all n. $n\delta + \eta$ is defined for all n, η (for $\eta < p\delta$ by (Arch) and $(n+p)\delta = n\delta + p\delta > n\delta + \eta$ by $(NA_1 r)$, $(AO_2 r)$). It follows that $\xi < k\delta$ implies $\xi < (k+p)\delta$ (for $\xi = (k+p)\delta$ implies $\xi > k\delta$ by (NO_1), and $\xi > (k+p)\delta$ gives $(k+p)\delta + \eta = \xi$ by $(A_2^* r)$, and $\xi = k\delta + (p\delta + \eta)$ by $(A_1 r)$, $(NA_1 r)$, as the latter sum is defined, and hence $\xi > k\delta$ by $(AO_1 r)$). By (Arch), k, l, m exist such that $\alpha < k\delta$, $\sigma < l\delta$, $\tau < m\delta$, and putting $\mu = (k+l+m)\delta$, we have case (ii).

It will now be shown that at least one of conditions (i) to (iv) must hold. Suppose (i), (ii), (iii) are false. As (iii) is false, δ, ε exist such that $\delta + \varepsilon$ is defined and $\varepsilon \geqq \alpha$ or $\varepsilon \geqq \sigma$ or $\varepsilon \geqq \tau$ and, by $(AO_2 r)$, *one* of $\delta + \alpha$, $\delta + \sigma$, $\delta + \tau$ is defined. As $\alpha < \sigma$, $\sigma < \tau$ and $\tau \leqq \alpha$ [(i) being false], *all* of $\delta + \alpha$, $\delta + \sigma$, $\delta + \tau$ are defined. As (ii) is false, every ξ satisfies one of $\xi \leqq \alpha$, $\xi \leqq \sigma$, $\xi \leqq \tau$ and $(AO_2 r)$ implies that $\delta + \xi$ is defined for every ξ. In particular, $\delta + \delta = 2\delta$, $\delta + 2\delta = 3\delta$, etc., $\delta + (n-1)\delta = n\delta$ are all defined which gives case (iv).

$(NA_1 l)$ $m\alpha + n\alpha = (m+n)\alpha$ if the left hand side is defined.

Proof. $(A_1 l)$.

(N_1) $m(n\alpha) = (mn)\alpha$ if one side is defined.

Proof. (NA_1)[9]).

(O_2) $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ imply $\alpha < \gamma$ *(transitive law)*.

Proof. By $(A_2^* r)$ $\alpha + \xi = \beta$, $\beta + \eta = \gamma$, hence $\gamma = (\alpha + \xi) + \eta = \alpha + (\xi + \eta) > \alpha$ by $(A_1 l)$, $(AO_1 r)$.

(Arch') If $\alpha < \beta$, then m exists such that $m\alpha < \beta \dot{\leqq} (m+1)\alpha$, whence $\beta = m\alpha + \varrho$, $\varrho \leqq \alpha$.

Proof. By (Arch) there exists a smallest m such that $\beta \dot{\leqq} (m+1)\alpha$, whence $m\alpha < \beta$, by (O_1), $m\alpha + \varrho = \xi$, by $(A_2^* r)$, and $\varrho \leqq \alpha$ [as $\varrho > \alpha$ would imply $\beta = m\alpha + \varrho > m\alpha + \alpha = (m+1)\alpha$, by $(AO_2 r)$, (NA_1)].

$(AO_1 l)$ $\beta < \alpha + \beta$ *(left positive law)*.

[9]) Whenever the two forms (Lr), (Ll) of a law are valid, it will simply be quoted as (L)

Proof. Either: $\beta \leqq \alpha$, then $\alpha < \alpha + \beta$, $\beta < \alpha + \beta$, by $(AO_1 r)$, (O_2); or: $\alpha < \beta$, then, by (Arch'), $m\alpha < \beta \leqq (m+1)\alpha$ and $\alpha + \beta > \alpha + m\alpha = (m+1)\alpha \geqq \beta$ using $(AO_2 r)$, (O_2).

$(AO_2 l)$ If $\alpha' + \beta$ is defined and $\alpha < \alpha'$, then $\alpha + \beta$ is defined and $\alpha + \beta < \alpha' + \beta$ *(left monotonic law)*.

Proof. $\alpha' + \beta = (\alpha + \xi) + \beta = \alpha + (\xi + \beta) > \alpha + \beta$, using $(A_2^* r)$, $(A_1 l)$, $(AO_1 l)$, $(AO_2 r)$.

(NO_2) If $n\beta$ is defined and $\alpha < \beta$, then $n\alpha$ is defined and $n\alpha < n\beta$.

Proof. (AO_2), (O_2).

(NO_2') $n\alpha < n\beta$ implies $\alpha < \beta$, $n\alpha = n\beta$ implies $\alpha = \beta$.

Proof. (NO_2), (O_1).

1.4. Discrete systems

A system Σ is called *discrete* if ν exists such that $\nu \leqq \alpha$ for all α. Every α is of the form $n\nu$, for either $\alpha = 1 \cdot \nu$ or $\nu < \alpha$ whence, by (Arch'), $\alpha = (n-1)\nu + \varrho$, $\varrho \leqq \nu$, i.e. $\varrho = \nu$, $\alpha = n\nu$. Σ thus consists exactly of all $n\nu$ with either $1 \leqq n < \infty$ or $1 \leqq n \leqq n_\nu$.

1.5. Dense systems

A system is called *dense* if it is not discrete, i.e. if

(O_3) To any α there exists $\beta < \alpha$.

(O_3') To any α, k there exists β_k such that $k\beta_k < \alpha$.

Proof. β_1 exists by (O_3); if β_k exists then $k\beta_k + \xi = \alpha$ by $(A_2^* r)$, and by (O_3) there exists $\beta_{k+1} < \min(\beta_k, \xi)$ whence $\alpha = k\beta_k + \xi > k\beta_{k+1} + \beta_{k+1} = (k+1)\beta_{k+1}$, by (NO_2), (AO_2), (NA_1).

(O_3'') If $\gamma < \alpha$ then β exists such that $\gamma < \beta < \alpha$.

Proof. $\gamma + \xi = \alpha$, $\beta' < \xi$, $\gamma < \gamma + \beta' = \beta < \gamma + \xi = \alpha$, using $(A_2^* r)$, (O_3), (AO_1), (AO_2), (O_2).

1.6. The commutative law

Addition in every system is commutative:

(A_3) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ if one side is defined.

Proof. Let $\alpha + \beta$ be defined. By §1.4 and (NA_1), (A_3) holds in any discrete system. In a dense system distinguish two cases:

(i) $\alpha + \beta$ is not the greatest element of Σ, $\alpha + \beta < \gamma$, say, whence $(\alpha + \beta) + \xi = \gamma$, by $(A_2^* r)$. By (O_3') choose $2\delta < \min(\alpha, \beta, \xi)$, then, by (Arch'), $\alpha = m\delta + \varrho$, $\beta = n\delta + \sigma$, $\varrho \leqq \delta$, $\sigma \leqq \delta$, whence $\gamma = \alpha + \beta + \xi > m\delta + n\delta + 2\delta = (n+1)\delta + (m+1)\delta \geqq \beta + \alpha$, by (AO_2), (NA_1), (O_2), so that $\beta + \alpha$ is defined. $\alpha + \beta < \beta + \alpha$ (and similarly $\beta + \alpha < \alpha + \beta$) leads to a contradiction choosing $\gamma = \beta + \alpha$ in the preceding argument. Hence $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, by (O_1).

(ii) $\alpha+\beta$ is the greatest element of Σ. Choose $\delta<\alpha$, by (O_3), $\delta+\xi=\alpha$, by $(A_2^* r)$, then $\alpha+\beta=\delta+\xi+\beta=\delta+\beta+\xi=\beta+\delta+\xi=\beta+\alpha$, applying (i) twice.

(NA_2) $n(\alpha+\beta)=n\alpha+n\beta$ if one side is defined.

Proof. (A_3).

1.7. Continuous systems

A dense system is called *continuous* if it satisfies

(Ded) If Σ is dissected into two non-empty classes A, Ω such that $\lambda\in A$, $\omega\in\Omega$ imply $\lambda<\omega$, then there exists σ (called a *generator* of the *section*) satisfying $\lambda\leqq\sigma\leqq\omega$ for all $\lambda\in A$, $\omega\in\Omega$ *(Dedekind's law)*. [The generator is unique by (O_3'').]

In any system satisfying (Ded), the axiom (Arch) may be replaced by the two axioms $(A_1 l)$, $(AO_1 l)$.

Proof. Assume (O_1), $(A_1 r)$, $(A_1 l)$, $(A_2^* r)$, $(AO_1 r)$, $(AO_1 l)$ [and hence (O_2), (NO_1), $(AO_2 r)$] and (Ded). Suppose (Arch) is false. Then there exist α, β such that $n\alpha$ is defined and $\leqq\beta$ for all n. This implies $n\alpha<\beta$ [as $n\alpha=\beta$ implies $(n+1)\alpha>\beta$ by (NO_1)]. Define a section: $\lambda\in A$ if $\lambda\leqq n\alpha$ for some n, $\omega\in\Omega$ if $\omega>n\alpha$ for all n. As $n\alpha\in A$ for all n and $\beta\in\Omega$, A, Ω are non-empty; and, by (O_2), $\lambda<\omega$. Let σ be a generator of the section; then $\alpha<2\alpha\leqq\sigma$, $\alpha+\xi=\sigma$, by $(A_2^* r)$, whence $\xi<\sigma$, by $(AO_1 l)$; this means $\xi\in A$, $\xi\leqq n\alpha$ for some n, and $\sigma=\alpha+\xi\leqq\alpha+n\alpha<(n+2)\alpha\leqq\sigma$, using $(AO_2 r)$, (O_2), a contradiction.

A complete continuous system will be called a *continuum*. A continuum $\Gamma=\Gamma(<, +)$ is thus characterized by the axioms (O_1), (O_3), (Ded), (A_1), $(A_2^* r)$, $(AO_1 r)$, $(AO_1 l)$, together with an unrestricted addition. In particular, the set $P^+(<, +)$ of the positive real numbers is a continuum (see § 3), which proves the *consistency* of the axioms; their *independence* will be proved in § 7.1; and it will follow from Theorem I (§ 2.23) that the axioms are *categorical* (in the sense that all continua are isomorphic).

§ 2. The measurement of magnitudes

2.1. The fundamental theorem

To measure the magnitudes of a system Σ means to set up an isomorphism of Σ into the set P^+ of the positive real numbers, i.e. a biunique map of Σ on a subset Σ' of P^+ which preserves order and addition (and hence also the operation N). A map $\alpha\to\alpha'$ of a system Σ into a system T is an isomorphism if and only if it is an A-homomorphism, i.e. $(\alpha+\beta)'=\alpha'+\beta'$. Order is automatically preserved, as $\alpha<\beta$ implies $\alpha+\xi=\beta$, $\alpha'+\xi'=\beta'$, $\alpha'<\beta'$; and this implies that the map is biunique. The existence of the required map, and its uniqueness (after choice of a unit) are expressed by

Theorem I. *If Σ is any system, Γ any continuum, and $\varepsilon\in\Sigma$, $\iota\in\Gamma$ any prescribed elements (units), then there exists exactly one isomorphism $\alpha\to\alpha'$ of Σ into Γ which maps ε on ι.*

Theorem I will first be proved for a complete system Σ (§ 2.2). The case of an incomplete Σ can be reduced to this case by embedding Σ in a complete system T (§ 2.3).

2.2. Proof of Theorem I for complete systems Σ

2.21. Existence of the isomorphism.

(i) Definition of the map. For any $\alpha \in \Sigma$ define α' as the generator of the following section in Γ:

$\lambda \in \Lambda_\alpha$ if m, n exist such that $m\varepsilon < n\alpha$ and $n\lambda < m\iota$,

$\omega \in \Omega_\alpha$ if $m\varepsilon < n\alpha$ always implies $n\omega \geqq m\iota$.

Proof of the section properties. Λ_α is not empty: choose n, by (Arch), such that $\varepsilon < n\alpha$, and λ, by (O_3'), such that $n\lambda < \iota$, then $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Ω_α is not empty: choose k such that $\alpha < k\varepsilon$, and let $\omega = k\iota$; then $m\varepsilon < n\alpha$ implies, together with $n\alpha < nk\varepsilon$, $m < nk$, whence $n\omega = nk\iota > m\iota$, i.e. $\omega \in \Omega_\alpha$. Finally, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $\omega \in \Omega_\alpha$ imply $n\lambda < m\iota \leqq n\omega$, whence $\lambda < \omega$.

(ii) $(k\alpha)' = k\alpha'$.

Proof. If $k\alpha' < (k\alpha)'$, then $k\alpha' + \xi = (k\alpha)'$ and, choosing δ with $k\delta < \xi$, $k(\alpha' + \delta) < (k\alpha)'$ which means $m\varepsilon < nk\alpha$, $nk(\alpha' + \delta) < m\iota$ for suitable m, n, whence $\alpha' + \delta \in \Lambda_\alpha$, a contradiction.

If $(k\alpha)' < k\alpha'$, then $(k\alpha)' + \xi = k\alpha'$ and, with $k\delta < \xi$, $k(\alpha' - \delta) > (k\alpha)'$ which means that, for any m, n, $mk\varepsilon < nk\alpha$ always implies $nk(\alpha' - \delta) \geqq mk\iota$ whence, cancelling k, $\alpha' - \delta \in \Omega_\alpha$, a contradiction.

(iii) $\alpha < \beta$ implies $\alpha' \leqq \beta'$.

Proof. Λ_α is contained in Λ_β.

(iv) $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$.

Proof. If Σ is discrete, this follows directly from (ii). Let Σ be dense, and suppose $(\alpha + \beta)' \neq \alpha' + \beta'$. Let the difference of the two terms be ξ. There exists δ such that $\delta < \alpha$, $\delta < \beta$, and $2\delta' < \xi$ [take any $\gamma \in \Sigma$, k such that $\gamma' < k\xi$, δ such that $2k\delta < \min(\alpha, \beta, \gamma)$, then by (ii), (iii), $2k\delta' \leqq \gamma' < k\xi$, $2\delta' < \xi$]. By (Arch') m, n exist such that

$$m\delta < \alpha \leqq (m+1)\delta,\ n\delta < \beta \leqq (n+1)\delta, \text{ whence } (m+n)\delta < \alpha + \beta \leqq (m+n+2)\delta.$$

By (ii), (iii) these inequalities imply

$$m\delta' \leqq \alpha' \leqq (m+1)\delta', \quad n\delta' \leqq \beta' \leqq (n+1)\delta',$$

and

$$(m+n)\delta' \leqq (\alpha+\beta)' \leqq (m+n+2)\delta';$$

but the first two of these also imply $(m+n)\delta' \leqq \alpha' + \beta' \leqq (m+n+2)\delta'$, so that $\xi \leqq 2\delta'$, a contradiction.

(v) $\varepsilon' = \iota$.

Proof. As $m\varepsilon < n\varepsilon$ implies $m < n$ and $n\iota > m\iota$, $\iota \in \Omega_\varepsilon$, i.e. $\iota \geqq \varepsilon'$. $\iota > \varepsilon'$ is impossible; for choose γ such that $\varepsilon' < \gamma < \iota$; then $m\varepsilon < (m+1)\varepsilon$ must imply, for all m, $(m+1)\gamma \geqq m\iota$, i.e. $\gamma \geqq m(\iota - \gamma)$, contradicting (Arch).

2.22. Uniqueness of the isomorphism.

Suppose there are two isomorphism $\alpha \to \alpha'$ and $\alpha \to \alpha^*$ with $\varepsilon' = \varepsilon^* = \iota$, and suppose $\alpha' \neq \alpha^*$ for some α, $\alpha' < \alpha^*$, say, whence $\alpha' + \xi = \alpha^*$. Choose m such that $\iota < m\xi$, and let n be the smallest integer satisfying $m\alpha' < n\iota$; then $n\iota < m\alpha^*$ (as $n\iota \geqq m\alpha^* = m\alpha' + m\xi > m\alpha' + \iota$ gives $(n-1)\iota > m\alpha'$). But these imply $m\alpha < n\varepsilon$ and $n\varepsilon < m\alpha$, a contradiction.

2.23. Corollary. *An isomorphism of a* continuum Σ *into the continuum* Γ *is an isomorphism of* Σ *on* Γ.

Proof. Suppose the isomorphism mapping ε on ι maps Σ on a proper subset of Γ. By Theorem I there exists an isomorphism of Γ into Σ mapping ι on ε. The resultant map is an isomorphism of Σ on a proper subset of Σ mapping ε on ε; but the identical map of Σ on Σ is the only such isomorphism.

2.3. Embedding of an incomplete system in a complete system

2.31. Lemma I. *Every incomplete system is a segment*[10]) *of a complete system.*

Proof. By § 1.4 Lemma I is trivial for discrete systems. Let Σ be dense, $\sigma \in \Sigma$, and δ such that $3\delta < \sigma$. Let Δ be the set of all $\xi \leqq \delta$; then (i) the sum of any two or three elements of Δ is defined in Σ, and (ii) every $\alpha \in \Sigma$ can be represented, by (Arch'), in the form $\alpha = k_\alpha \delta + \alpha^*$ where $\alpha^* \in \Delta$ and k_α is a non-negative integer (with the convention that a term $0 \cdot \delta$ is to be suppressed). Σ may thus be described as a set of expressions $x\delta + \xi$ where $\xi \in \Delta$, x a non-negative integer, and, obviously,

(E) $x\delta + \xi = y\delta + \eta$ if and only if $x = y$ and $\xi = \eta$,

(O) $x\delta + \xi < y\delta + \eta$ if and only if either $x < y$ or $x = y$ and $\xi < \eta$,

(A) $(x\delta + \xi) + (y\delta + \eta) = (x + y + k_{\xi+\eta})\,\delta + (\xi + \eta)^*$.

Let T be the set of *all* expressions $x\delta + \xi$ $(\xi \in \Delta,\ 0 \leqq x < \infty)$. T becomes a complete system, and Σ a segment of T, on defining equality, order and addition in T by (E), (O), (A). The trichotomy law (O_1) holds by (E), (O), and the laws (A_1), $(A_2^* r)$, $(AO_1 r)$, (Arch) are proved as follows.

(A_1) $\big((x\delta + \xi) + (y\delta + \eta)\big) + (z\delta + \zeta)$

$$= (x + y + z + k_{\xi+\eta} + k_{(\xi+\eta)^*+\zeta})\,\delta + \big((\xi + \eta)^* + \zeta\big)^*$$

and $(x\delta + \xi) + \big((y\delta + \eta) + (z\delta + \zeta)\big)$

$$= (x + y + z + k_{\eta+\zeta} + k_{\xi+(\eta+\zeta)^*})\,\delta + \big(\xi + (\eta + \zeta)^*\big)^*$$

are equal; this is clear for $x = y = z = 0$ as $(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta)$ in Σ, and hence holds for any x, y, z as the only term depending on x, y, z, viz. $x + y + z$, is common to both expressions.

$(A_2^* r)$ If $x\delta + \xi < z\delta + \zeta$ then $y\delta + \eta$ exists such that $(x\delta + \xi) + (y\delta + \eta) = z\delta + \zeta$, i.e. $x + y + k_{\xi+\eta} = z$, $(\xi + \eta)^* = \zeta$: if $\xi < \zeta$ put $\eta = \zeta - \xi$, $y = z - x$; if $\xi \geqq \zeta$ (whence $x < z$) put $\eta = (\delta + \zeta) - \xi$, $y = z - x - 1$.

[10]) A segment is the lower class of a Dedekind section.

(AO_1r) $x\delta+\xi<(x\delta+\xi)+(y\delta+\eta)$; for either $x<x+y+k_{\xi+\eta}$, or $y=k_{\xi+\eta}=0$ whence $\xi<\xi+\eta=(\xi+\eta)^*$.

(Arch) To any $x\delta+\xi$, $y\delta+\eta$ there exists n such that $y\delta+\eta<n(x\delta+\xi)$: if $x>0$ take $n=y+1$; if $x=0$ choose m such that $m\xi\leqq\delta<(m+1)\xi$, then $(m+1)\xi\leqq 2\delta$, whence $(m+1)(0\cdot\delta+\xi)=\delta+\big((m+1)\xi\big)^*$, and take $n=(m+1)(y+1)$.

2.32. Corollary. *Every incomplete continuous system is a segment of a continuum.*

Proof. (O_3) and (Ded) in Σ obviously imply (O_3) and (Ded) in T.

2.4. Proof of Theorem I for incomplete systems Σ

The existence of the isomorphism follows by embedding Σ in T, by § 2.31, and mapping T into Γ, by § 2.21. The uniqueness follows from § 2.22, observing that any isomorphism $\alpha\to\alpha'$ of Σ into Γ can obviously be extended to an isomorphism of T into Γ by mapping $x\delta+\xi$ on $x\delta'+\xi'$.

2.5. Remarks

The above embedding construction is closely related to Schreier's construction of a covering group[11]). A similar construction was proposed by Zassenhaus[12]): T can be defined as the set of all formal sums $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ with $\xi_i\in\Sigma$. This construction is more complicated than ours, chiefly because the definition of equality of formal sums is more involved than (E); on the other hand, Zassenhaus's construction can be applied to the more general case of non-archimedean systems.

Theorem I can also be proved directly without recourse to Lemma I [and even without using the commutative law (A_3)]. The proof is on the same lines as that given in § 2.2, but somewhat more laborious, as definition § 2.21 (i) cannot be used for systems with restricted addition and has to be replaced by: $\lambda\in\Lambda_\alpha$ if and only if m, n, δ exist such that $n\delta<\varepsilon$, $\alpha\dot{<}m\varepsilon$, and $n\lambda<m\iota$.

Lemma I and (A_3) can then be deduced from Theorem I and the existence of a continuum. Altogether, this procedure may be slightly shorter, but it is less transparent and rather artificial, as neither Lemma I nor (A_3) rest on the existence of a continuum.

Schreier's construction was used by Rieger[13]) to construct a linearly ordered covering group to any cyclically ordered group, and, in particular, to prove that the only group with continuous cyclic order is the group U of the unimodular complex numbers. It follows from Theorem I that the subgroups of U can be characterized as the groups with archimedean cyclic order (§ 8).

---

[11]) See e.g. H. Zassenhaus, The Theory of Groups, Chap. III, § 6. New York 1949.

[12]) loc. cit. [3]).

[13]) Rieger, L. S.: On the ordered and cyclically ordered groups, Věstník Král. České Spol. Nauk, Tř. Mat.-Přír. **1946** no. 6; **1947** no. 1; **1948** no. 1.

II. Foundations of Analysis

§ 3. The positive real numbers

3.1. Definition

We assume only the theory of non-negative integers. A *positive real number* ξ is a sequence $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ of non-negative integers, called *digits*, where $x_n \leqq 9$ for $n > 0$ and $x_m > 0$ for infinitely many m. We write $\xi = x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$, and if $x_m = 9$ for $m > n$, $\xi = x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \dot{9}$. The set of all ξ will be called P^+.

3.2. Equality and order

Definitions. If $\xi = x_0 x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$, $\eta = y_0 y_1 y_2 \ldots y_n \ldots$ then

(E) $\xi = \eta$ if and only if $x_n = y_n$ for all n,

(O) $\xi < \eta$ if and only if j exists such that $x_n = y_n$ for $n < j$, $x_j < y_j$.

Order satisfies the trichotomy law (O_1), the density law (O_3) (direct consequences of (E), (O)) and Dedekind's law (Ded).

Proof of (Ded). Let Λ, Ω be a section of P^+. A sequence of digits s_n satisfying

$$\omega_n = s_0 s_1 \ldots s_n \dot{9} \in \Omega \quad \text{and, if } s_n > 0, \quad \lambda_n = s_0 s_1 \ldots (s_n - 1)\dot{9} \in \Lambda$$

can be constructed, recursively, as follows. As Ω is not empty, $u_0 u_1 \ldots u_n \ldots \in \Omega$, whence $u_0 \dot{9} \in \Omega$, and there exists a smallest integer s_0 such that $s_0 \dot{9} \in \Omega$. If s_m has been constructed for $m \leqq n$, let s_{n+1} be the smallest integer such that $s_0 s_1 \ldots s_n s_{n+1} \dot{9} \in \Omega$. As Λ is not empty, not all numbers of the form $00 \ldots 0\dot{9}$ can be in Ω, i.e. not all s_n are zero. If $s_m \neq 0$ for infinitely many m, put $\sigma = s_0 s_1 \ldots s_n \ldots$; if $s_j \neq 0$, $s_m = 0$ for all $m > j$, put $\sigma = s_0 s_1 \ldots s_{j-1}(s_j - 1)\dot{9}$. If $\lambda \in \Lambda$ then $\lambda \leqq \sigma$, as $\lambda > \sigma$ would imply $\lambda \geqq \omega_n$ for some n; if $\omega \in \Omega$ then $\omega \geqq \sigma$ as $\omega < \sigma$ would imply $\omega < \lambda_n$ for some n. Hence σ generates the section.

3.3. Addition

Definition. If ξ, η are as above, put

$e_n = 1$ if $m > n$ exists such that $x_i + y_i = 9$ for $n < i < m$, $x_m + y_m > 9$,

$e_n = 0$ otherwise,

$s_0 = x_0 + y_0 + e_0$ and $s_n = x_n + y_n + e_n - 10 e_{n-1}$ for $n > 0$.

Then $0 \leqq s_n \leqq 9$ for $n > 0$, as

either: $x_n + y_n < 9$ whence $e_{n-1} = 0$ and $0 \leqq s_n = x_n + y_n + e_n \leqq 9$,

or: $x_n + y_n = 9$ whence $e_{n-1} = e_n$ and $0 \leqq s_n = 9(1 - e_n) \leqq 9$,

or: $x_n + y_n > 9$ whence $e_{n-1} = 1$ and $0 \leqq s_n = x_n + y_n + e_n - 10 \leqq 9$;

and $s_m > 0$ for infinitely many m, as

either: $e_n = 0$ for $n \geqq k$ whence $x_m > 0$, $s_m = x_m + y_m > 0$ for infinitely many $m > k$,

or: $e_n = 1$ for $n \geqq k$ whence $x_m + y_m > 9$, $s_m = x_m + y_m - 9 > 0$ for infinitely many $m > k$,

or: $e_{m-1} = 0$, $e_m = 1$ for infinitely many m and $s_m = x_m + y_m + 1 > 0$.

Hence we may define

(A) $\xi + \eta = s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots$.

Addition is unrestricted and unique and satisfies the commutative law (A_3) (trivially), the positive law (AO_1), the associative law (A_1) and the restricted inverse law (A_2^*). We sketch the proofs of the last two:

Proof of (A_1). Put ${}^n\xi = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^{n-i}$. It is easily seen that ${}^n(\xi+\eta) = {}^n\xi + {}^n\eta + e_n$, whence ${}^n\xi + {}^n\eta \leqq {}^n(\xi+\eta) \leqq {}^n\xi + {}^n\eta + 1$ and $|{}^n((\xi+\eta)+\zeta) - {}^n(\xi+(\eta+\zeta))| \leqq 2$ which implies $(\xi+\eta)+\zeta = \xi+(\eta+\zeta)$ ($\sigma \neq \tau$ obviously implies that $|{}^n\sigma - {}^n\tau|$ is unbounded).

Proof of (A_2^*). Let $\xi < \zeta$; then $\xi = x_0 x_1 \dots x_{j-1} x_j x_{j+1} \dots$, $\zeta = x_0 x_1 \dots x_{j-1} z_j z_{j+1} \dots$ where $x_j < z_j$, and putting $\tau = x_0 x_1 \dots x_j \dot{9}$, $\xi \leqq \tau < \zeta$. To solve $\xi + \eta = \zeta$, it is sufficient to solve $\tau + \sigma = \zeta$ and (if $\xi < \tau$) $\xi + \varrho = \tau$ [$\eta = \varrho + \sigma$ then satisfies $\xi + \eta = \zeta$ by (A_1)]. Obviously, $\sigma = 00 \dots 0 (z_j - x_j - 1) z_{j+1} z_{j+2} \dots$; and $\varrho = 00 \dots 0 (9 - x_{j+1}) (9 - x_{j+2}) \dots$ unless ξ ends in a string of 9's; in this case $\xi = x_0 x_1 \dots x_j \dots x_k \dot{9}$, $x_k < 9$, and $\varrho = 00 \dots 0 (9 - x_{j+1}) \dots (9 - x_{k-1}) (8 - x_k) \dot{9}$.

3.4. Remarks

3.1—3.3 establish $P^+ = P^+(<, +)$ as a continuum. — Instead of the base 10, any other base $b > 1$ could have been used to define the positive real numbers; by Theorem I and the Corollary § 2.23 all these definitions are isomorphic (the isomorphism being uniquely determined by choosing $0\dot{9}$ resp. $0\,\overline{b-1}$ as units).

3.5. Multiplication

Definition. By Theorem I and the Corollary § 2.23 there exists exactly one automorphism α^* of $\Gamma = P^+$ (or any continuum) which maps a given (unit) element 1 ($1 = 0\dot{9}$, say) on any given α. The map $\alpha^* \to \alpha$ is thus a biunique map of the automorphism group G of Γ on Γ; it becomes an isomorphism of G on Γ by defining

(M) $\alpha\beta$ is the image of $\alpha^* \beta^*$.

This means that $\alpha\beta$ is the image of 1 by applying first β^*, then α^* to Γ; or, alternatively, that α^* is the map $\xi \to \alpha\xi$. 1^* is the identical map, i.e. the neutral element of G. — The laws of multiplication now follow easily:

(M_0) $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$,

(M_1) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

(M_2) For any α, β there exist ξ, η such that $\alpha\xi = \eta\alpha = \beta$,

express the group properties.

(MAr) $\alpha(\xi+\eta) = \alpha\xi + \alpha\eta$,

(MO_2r) $\xi < \eta$ implies $\alpha\xi < \alpha\eta$,

express the automorphism properties.

(MAl) $(\alpha+\beta)\xi = \alpha\xi + \beta\xi$.

Proof. The map $\xi \to \xi' = \alpha\xi + \beta\xi$ is an automorphism as $(\xi+\eta)' = \alpha(\xi+\eta) + \beta(\xi+\eta) = \alpha\xi + \alpha\eta + \beta\xi + \beta\eta = (\alpha\xi + \beta\xi) + (\alpha\eta + \beta\eta) = \xi' + \eta'$; as it maps 1 on $1' = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta$, it must be identical with the automorphism $\xi \to (\alpha+\beta)\xi$.

(M_3) $\alpha\xi = \xi\alpha$.

Proof. The map $\xi \to \xi' = \xi\alpha$ is an automorphism as $(\xi+\eta)' = (\xi+\eta)\alpha = \xi\alpha + \eta\alpha = \xi' + \eta'$; as it maps 1 on $1' = 1 \cdot \alpha = \alpha$, it must be identical with the automorphism $\xi \to \alpha\xi$.

3.6. Structure of $\Gamma(<, \cdot)$

$\Gamma = \Gamma(<, \cdot)$ is a continuously ordered multiplicative group. Its structure may also be described as follows. The map $\alpha \to \bar{\alpha}$, where $\bar{\alpha}$ is the inverse of α, is an isomorphism of $\Gamma(<, \cdot)$ on $\Gamma(>, \cdot)$ [for $\alpha < \beta$ implies $\bar{\beta} = \bar{\beta}\alpha\bar{\alpha} < \bar{\beta}\beta\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$, and $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$, by (MO_2), (M_3)]. In particular, the set $\Gamma^+(<, \cdot)$ of all $\alpha > 1$ is mapped isomorphically on the set $\Gamma^-(>, \cdot)$ of all $\beta < 1$, and Γ^- consists of the inverses $\bar{\alpha}$ of the $\alpha \in \Gamma^+$. — $\Gamma^+(<, \cdot)$, and hence $\Gamma^-(>, \cdot)$, is a continuum.

Proof. The laws (O_1), (O_3), (Ded), (M_1) hold in Γ^+ as (O_1), (O_3''), (Ded), (M_1) hold in Γ. If $\alpha, \beta \in \Gamma^+$, i.e. $1 < \alpha$, $1 < \beta$, then $1 < \alpha = \alpha \cdot 1 < \alpha\beta$ by (MO_2) in Γ; this proves $\alpha\beta \in \Gamma^+$, i.e. the completeness of Γ^+, and $\alpha < \alpha\beta$ i.e. (MO_1) in Γ^+. If $\alpha < \beta$ then $\alpha\xi = \beta$ has a solution $\xi \in \Gamma$, and $\xi \in \Gamma^+$ (as $\xi \leqq 1$ would imply $\beta = \alpha\xi \leqq \alpha \cdot 1 = \alpha$); this is (M_2^*) in Γ^+. — $\Gamma(<, \cdot)$, and any set isomorphic with $\Gamma(<, \cdot)$, will be called a *bicontinuum*. In particular, $\Gamma(>, \cdot)$ is a bicontinuum.

§ 4. The real numbers

4.1. Definition

The set P of all real numbers is obtained by extending the set P^+ by the creation of a new element 0 and a new element $-\alpha$ to every $\alpha \in P^+$; P^- will denote the set of all $-\alpha$.

4.2. Order and addition

The definitions of order and addition are extended from $P^+(<, +)$ to P in the usual manner:

(O) $-\alpha < 0$; $0 < \beta$; $-\alpha < \beta$; $-\alpha < -\beta$ if and only if $\beta < \alpha$.

(A) $0 + \xi = \xi + 0 = \xi$ for all $\xi \in P$; $(-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta)$;
$(-\alpha) + \beta = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$ or 0 or $-(\alpha - \beta)$ if $\alpha <$ or $=$ or $> \beta$.

The laws of order and addition (O_1), (O_2), (O_3''), (Ded), (A_1), (A_2), (A_3), (AO_2) are obtained by proving that $P(<, +)$ is a bicontinuum, i.e. that $P(<, +)$ is isomorphic to $\Gamma(<, \cdot)$:

Lemma II. *There exists exactly one isomorphism $\xi \to \xi'$ of $P(<, +)$ on $\Gamma(<, \cdot)$ mapping a given $\varepsilon \in P^+$ on a given $\iota \in \Gamma^+$.*

Proof. By Theorem I and Corollary § 2.23, there exists an isomorphism $\alpha \to \alpha'$ of $P^+(<, +)$ on $\Gamma^+(<, \cdot)$ with $\varepsilon' = \iota$; this may be extended to an isomorphism of $P(<, +)$ on $\Gamma(<, \cdot)$ by defining $0' = 1$, $(-\alpha)' = \overline{\alpha'}$, as is easily verified using § 3.6, (O), (A). This is the only isomorphism with $\varepsilon' = \iota$; for the neutral element 0 must be mapped on the neutral element 1, hence the set P^+ of all $\alpha > 0$ must be mapped into the set Γ^+ of all $\beta > 1$, and $\alpha \to \alpha'$ is the only such isomorphism; as $(-\alpha) + \alpha = 0$ must imply $(-\alpha)'\alpha' = 1$, $(-\alpha)'$ must be $\overline{\alpha'}$.

4.3. Extension of Theorem I

Lemma II applies of course to *any* two bicontinua P, Γ. Observing that, by § 3.6, $P(>, +)$, $\Gamma(>, \cdot)$ are bicontinua, the Lemma may be extended to cover the case where ε, ι are *any* elements of P, Γ different from the neutral elements, by defining an *isomorphism* as a biunique map preserving the operation and *preserving or inverting* the order relation. It is convenient to include the case $\iota = 1$ as well. This may be done by defining a *homomorphism* as a map preserving the operation and preserving or inverting the relation $\leqq$, and observing that there is only one homomorphism of P into Γ which is not an isomorphism of P on Γ, viz. the trivial homomorphism mapping all $\alpha \in P$ on 1. [If $\alpha \to \alpha'$ is a homomorphism which is not an isomorphism, then α, β exist such that $\alpha < \beta$, but $\alpha' = \beta'$; $\alpha + \delta = \beta$ then implies $\delta > 0$ and $\alpha'\delta' = \alpha'$, i.e. $\delta' = 1$ whence $(n\delta)' = 1$ for all n, and using (Arch), $\xi' = 1$ for all $\xi \in P$.] This proves

Theorem II. *If P, Γ are bicontinua, $\varepsilon \in P$, $\iota \in \Gamma$, and ε is different from the neutral element of P, then there exists exactly one homomorphism of P into Γ mapping ε on ι, and this is an isomorphism of P on Γ unless ι is the neutral element of Γ.*

4.4. Multiplication

Theorem II applies, in particular, to the endo- and automorphisms of $P(<, +)$. These define multiplication in P, and the laws of multiplication are obtained as in § 3.5, with the modifications caused by the existence of order-inverting automorphisms (multiplication by negative numbers) and the trivial endomorphism (multiplication by 0).

§ 5. Exponentials and logarithms

5.1. Definition

The image of ξ in the homomorphism $\xi \to \xi'$ of $P(<, +)$ on $\Gamma(<, \cdot) = P^+(<, \cdot)$ mapping 1 on ε is called ε^ξ, and the original of ξ' (when $\varepsilon \neq 1$) is called $\log_\varepsilon \xi'$.

5.2. Properties

The properties of ε^ξ (and similarly those of $\log_\varepsilon \xi'$) follow directly from the definition and the homomorphism properties:

(1) ε^ξ is defined for $\varepsilon > 0$ and all ξ; when ξ ranges over P, ε^ξ ranges over $\Gamma = P^+$ (except for $\varepsilon = 1$, when $\varepsilon^\xi = 1$).

(2) $\varepsilon^0 = 1,\ \varepsilon^1 = \varepsilon$.

(3) $\varepsilon^{\xi+\eta} = \varepsilon^\xi \varepsilon^\eta$.

(4) $\xi < \eta$ implies $\varepsilon^\xi <, =, > \varepsilon^\eta$ according to whether $\varepsilon >, =, < 1$.

The map $\xi \to \varepsilon^{\tau\xi}$ (τ fixed) is a homomorphism of P into Γ mapping 1 on ε^τ, hence identical with the homomorphism $\xi \to (\varepsilon^\tau)^\xi$, i.e.

(5) $\varepsilon^{\tau\xi} = (\varepsilon^\tau)^\xi$.

As ξ ranges over P, $\gamma = \varepsilon^\xi$ ranges over Γ, and as $\xi \to \tau\xi$ is an endomorphism of P, $\gamma = \varepsilon^\xi \to \varepsilon^{\tau\xi} = \gamma^\tau$ is an endomorphism of Γ; hence

(6) $(\gamma\delta)^\tau = \gamma^\tau \delta^\tau$,

(7) $\gamma < \delta$ implies $\gamma^\tau <, =, > \delta^\tau$ according to whether $\tau >, =, < 0$.

(8) The function $\varphi(\xi) = \varepsilon^\xi\ (\varepsilon \neq 1)$ is convex, i.e., if $\alpha < \beta$, and if $\lambda(\xi)$ is the linear function satisfying $\lambda(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\lambda(\beta) = \varphi(\beta)$, then $\varphi(\xi) < \lambda(\xi)$ for $\alpha < \xi < \beta$.

Proof. As ε^ξ is monotonic, by (4), and takes all real positive values, by (1), it is continuous; as is well known, the convexity then follows from $\varepsilon^{(\xi+\eta)/2} < (\varepsilon^\xi + \varepsilon^\eta)/2$ (for $\xi \neq \eta$) which is a consequence of (3). The appeal to continuity (extraneous to the methods used in this paper) is unnecessary; any monotonic $\varphi(\xi)$ satisfying $\varphi\big((\xi+\eta)/2\big) < \big(\varphi(\xi) + \varphi(\eta)\big)/2$ (for $\xi \neq \eta$) is convex[14]).

5.3. Remarks

The above properties are a sufficient basis for the calculus treatment of ε^ξ: as ε^ξ is convex it possesses, at every ξ, a right and a left hand differential coefficient and the two are equal because

$$\lim_{h \to +0} (\varepsilon^{\xi+h} - \varepsilon^\xi)/h = \lim_{h \to +0} \varepsilon^h (\varepsilon^{\xi-h} - \varepsilon^\xi)/(-h).$$

The use of limits may be avoided, if so desired. It is easy to show that a convex function $\varphi(\xi)$ possesses a linear support at every ξ_0, i.e. a linear function $\lambda(\xi) = \mu(\xi_0)\,(\xi - \xi_0) + \varphi(\xi_0) < \varphi(\xi)$ for $\xi \neq \xi_0$. If $\mu_\varepsilon \xi + 1$ is a linear support of ε^ξ at $\xi = 0$, then $\mu_\varepsilon \varepsilon^{\xi_0}(\xi - \xi_0) + \varepsilon^{\xi_0}$ is a linear support at ξ_0; and as the gradient $\mu_\varepsilon \varepsilon^{\xi_0}$ cannot belong to a support at any $\xi_1 \neq \xi_0$ and as, on the other hand, $\mu_\varepsilon \varepsilon^{\xi_0}$ ranges over all possible gradients, the support at every point is unique. As $\delta^\xi = (\varepsilon^{\log_\varepsilon \delta})^\xi = \varepsilon^{\xi \log_\varepsilon \delta}$, $\mu_\varepsilon \log_\varepsilon \delta \cdot \xi + 1 < \delta^\xi$ for $\xi \neq 0$, i.e. $\mu_\delta = \mu_\varepsilon \log_\varepsilon \delta$, whence $\varepsilon^{1/\mu_\varepsilon} = \delta^{1/\mu_\delta}$ for all δ. Putting $\varepsilon^{1/\mu_\varepsilon} = e$, we have $\mu_e = 1$, $\xi + 1 < e^\xi$ for $\xi \neq 0$, whence, for $\xi = 1/n$, resp. $-\big(1/(n+1)\big)$, $(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$ and $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = e$.

[14]) The inequality implies $\varphi(\xi) < \lambda(\xi)$ for a dense set of ξ in (α, β); it follows that $\varphi(\gamma) \leq \lambda(\gamma)$ for every γ in (α, β), as $\varphi(\gamma) > \lambda(\gamma)$ would imply $\varphi(\xi) > \lambda(\xi)$ for a whole interval $\gamma \leq \xi < \delta$ (assuming φ increasing). Applying this result to the intervals $(\alpha, (\alpha+\beta)/2)$, $((\alpha+\beta)/2, \beta)$, it follows that $\varphi(\gamma) < \lambda(\gamma)$. — This is equivalent to a proof of the generalized theorem of the arithmetic and geometric mean: the convexity of ε^ξ means that $\varepsilon^{\tau\xi + (1-\tau)\eta} < \tau\,\varepsilon^\xi + (1-\tau)\,\varepsilon^\eta$ for $0 < \tau < 1$, $\xi \neq \eta$, whence, putting $\alpha = \varepsilon^\xi$, $\beta = \varepsilon^\eta$, $\alpha^\tau \beta^{1-\tau} < \tau\alpha + (1-\tau)\beta$.

§ 6. The trigonometric functions

6.1. Angles

Angles may be represented by the points $\mathfrak{x}=(\xi_1, \xi_2)$ on the unit circle $\xi_1^2+\xi_2^2=1$ (i.e. by the unimodular complex numbers), and addition of angles may be described by means of rotations (or multiplication of complex numbers). Let U be the group of the unimodular complex numbers, i.e. the set of all pairs $\mathfrak{x}=(\xi_1, \xi_2)$ with $\xi_1^2+\xi_2^2=1$, multiplication being defined by

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}=(\xi_1, \xi_2)(\eta_1, \eta_2)=(\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2,\ \xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1).$$

6.2. Measurement of angles

U may be transformed into an incomplete system by means of a definition of order with $\mathfrak{e}=(1, 0)$ as the greatest element (four right angles) together with the corresponding restriction of the operation preventing the sum of two angles from exceeding $\mathfrak{e}$. It is simpler (though less elegant) to restrict the consideration to the set Σ of acute angles [including the right angle $\mathfrak{i}=(0, 1)$], i.e. the set of all $\mathfrak{x}$ with $1>\xi_1\geqq 0$, $0<\xi_2\leqq 1$. Every other element of U can then be represented uniquely in the form $\mathfrak{i}^k\mathfrak{x}$ with $1\leqq k\leqq 3$, $\mathfrak{x}\in\Sigma$. Σ becomes an *incomplete continuous system* on defining

(O) $\mathfrak{x}<\mathfrak{y}$ if and only if $\xi_2<\eta_2$ (i.e. $\xi_1>\eta_1$),

(A) $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ if and only if $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\in\Sigma$.

As the map $\mathfrak{x}\to\xi_2$ is an order isomorphism of Σ on the interval $0<\xi_2\leqq 1$, order in Σ satisfies (O_1), (O_2), (O_3) and (Ded), and $\mathfrak{i}$ is the greatest element of Σ. Addition is commutative, and it remains to prove the following:

(AO_1) $\mathfrak{x}<\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$.

Proof. $\xi_1\geqq\xi_1\eta_1>\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2$.

(A_2^*) If $\mathfrak{x}<\mathfrak{y}$ then $\mathfrak{z}$ exists such that $\mathfrak{x}+\mathfrak{z}=\mathfrak{y}$.

Proof. The solution $\mathfrak{z}=(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2,\ \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$ of $\mathfrak{x}\mathfrak{z}=\mathfrak{y}$ lies in Σ, as $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2>0$ and $\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1>\eta_1\xi_2-\xi_2\eta_1=0$.

(A_1) $(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+\mathfrak{z}=\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$ if the left hand side is defined.

Proof. $\mathfrak{x}<\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}<(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+\mathfrak{z}$, by (AO_1), hence, by (O_2), $\mathfrak{x}<(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+\mathfrak{z}=(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{z}=\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\mathfrak{z})=\mathfrak{x}+(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$ as $\mathfrak{y}\mathfrak{z}\in\Sigma$, by (A_2^*).

By Theorem I and § 2.32 there exists to every $\varrho>0$ an isomorphism $\mathfrak{x}\to\tau$ of Σ into P^+ mapping $\mathfrak{i}$ on ϱ, and hence Σ on the segment Σ' of all τ with $0<\tau\leqq\varrho$. This provides a measure of the acute angles. (It may be extended to a map of U on $0<\xi\leqq 4\varrho$ by mapping $\mathfrak{i}^k\mathfrak{x}$ on $k\varrho+\tau$).

6.3. The trigonometric functions

Definition. Let $\mathfrak{x}=\mathfrak{t}(\tau)$ be the image of τ in the isomorphism of the interval $0<\tau\leqq\varrho$ on Σ. Then

(1) $\tau<\sigma$ implies $\mathfrak{t}(\tau)<\mathfrak{t}(\sigma)$,

(2) $\mathfrak{t}(\tau+\sigma)=\mathfrak{t}(\tau)\,\mathfrak{t}(\sigma)$ if $\tau+\sigma\leqq\varrho$.

The definition of the function $\mathfrak{t}$ may be extended to all real arguments ξ by representing ξ in the form $\xi = k\varrho + \tau$ where k is an integer and $0 < \tau \leq \varrho$ and defining $\mathfrak{t}(\xi) = \mathfrak{i}^k\,\mathfrak{t}(\tau)$. Then

(2′) $\mathfrak{t}(\xi+\eta) = \mathfrak{t}(\xi)\,\mathfrak{t}(\eta)$,

i.e. $\xi \to \mathfrak{t}(\xi)$ is a homomorphism of the additive group P on the multiplicative group U, and

(3) $\mathfrak{t}(\xi + 4\varrho) = \mathfrak{t}(\xi)$,

as $\mathfrak{i}^4 = \mathfrak{e}$ is the neutral element of U; hence U is isomorphic to the group, P mod 4ϱ. — If $\mathfrak{t}(\xi) = \mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2)$, define

$$\xi_1 = \cos_\varrho \xi, \qquad \xi_2 = \sin_\varrho \xi.$$

Properties. $\cos_\varrho \xi$, $\sin_\varrho \xi$ are defined for all real ξ, have the period 4ϱ and satisfy the usual addition theorems, by (2′). They are determined by their behaviour in $0 \leq \xi \leq \varrho$; by (O) and (1) $\sin_\varrho \xi$ is monotonic increasing and $\cos_\varrho \xi$ monotonic decreasing in this interval; and as they assume every value from 0 to 1, they are continuous. If $0 \leq \xi < \eta \leq 2\varrho$, then $(\sin_\varrho \xi + \sin_\varrho \eta)/2 = \sin_\varrho\big((\xi+\eta)/2\big)\,\cos_\varrho\big((\xi-\eta)/2\big) < \sin_\varrho\big((\xi+\eta)/2\big)$ which implies the concavity of $\sin_\varrho \xi$ in $0 \leq \xi \leq 2\varrho$, as in § 5.2 (8) or [14]). It follows that $\sin_\varrho \xi$ possesses a right differential coefficient μ_ϱ at $\xi = 0$, and as $\sin_\varrho \xi$ is odd, this is equal to the left differential coefficient. The addition theorems then give $d \sin_\varrho \xi / d\xi = \mu_\varrho \cos_\varrho \xi$. As $\sin_\varrho(\varrho\xi) = \sin_\sigma(\sigma\xi)$, $\varrho\mu_\varrho = \sigma\mu_\sigma$ for all σ; putting $\varrho\mu_\varrho = \pi/2$, we get $\mu_{\pi/2} = 1$ and the functions $\sin \xi = \sin_{\pi/2}\xi$, $\cos \xi = \cos_{\pi/2}\xi$, with $d \sin \xi / d\xi = \cos \xi$, etc.

III. Appendix

§ 7. Independence proofs

7.1. Independence of the axioms for continua

For each of the axioms (O_1), (O_3), (Ded), (A_1), $(A_2^* r)$, $(AO_1 r)$, $(AO_1 l)$ an example of a set $\Sigma(<, +)$ will be given satisfying all but this particular axiom. (O_1) will be split into two parts:

$\left(O_1 \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)$ For any α, β at $\begin{matrix} \text{most} \\ \text{least} \end{matrix}$ one of $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ holds.

Example $O_1 a$. $\Sigma = \{0\}$, defining $0 < 0$ and $0 + 0 = 0$.

Example $O_1 b$. $\Sigma = \{(\alpha_1, \alpha_2)\}$ where α_1, α_2 are any positive rational numbers, defining $(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$ and $(\alpha_1, \alpha_2) < (\beta_1, \beta_2)$ if and only if $\alpha_1 < \beta_1$ and $\alpha_2 < \beta_2$. [(Ded) holds vacuously as there are no Dedekind sections.]

Example O_3. Σ is the set of all natural numbers.

Example Ded. Σ is the set of all positive rational numbers.

Example A_1. Σ is the set of all positive real numbers with the usual order, addition $\dot{+}$ being defined by $\alpha \dot{+} \beta = \alpha + 2\beta$.

Example $A_2^* r$. Σ is the set of all real $\alpha > 1$.

Example AO_1r. Σ is the set of all continuous strictly increasing functions $f(\xi)$, defined for $0 \leqq \xi \leqq 1$, with $f(0) = \lambda_f > 0$, $f(1) = 1$. *Order:* The set of functions f with the same initial value $\lambda_f = \lambda$ has the cardinal $\aleph$, hence can be mapped biuniquely on the set $0 \leqq \mu \leqq 1$. Σ thus is in $1-1$-correspondence with the set (λ, μ) where $0 < \lambda < 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$, and may be ordered by ordering the (λ, μ) lexicographically. (O_1), (O_3), (Ded) then hold. *Addition:* $f \dot{+} g = g(f(\xi))$. (A_1) holds. (A_2r) holds, even without restriction: given any f, g, there exists x such that $f \dot{+} x = g$: for put $x(\xi) = g(f^{-1}(\xi))$ for $\lambda_f \leqq \xi \leqq 1$ (the inverse function f^{-1} of f is defined in this range) and $x(\xi) = (1 + \xi/\lambda_f)\lambda_g/2$ for $0 \leqq \xi \leqq \lambda_f$; then $x(f(\xi)) = g(f^{-1}(f(\xi))) = g(\xi)$. This shows that (AO_1r) must be false. (AO_1l) $g < f \dot{+} g$ is true, as $\lambda_{f \dot{+} g} = g(f(0)) = g(\lambda_f) > g(0) = \lambda_g$. This shows, incidentally, that $(A_2^* l)$ must be false as $y \dot{+} f = g$ implies $\lambda_f < \lambda_g$, hence cannot be solved when $f < g$ but $\lambda_f = \lambda_g$[15]).

Example AO_1l. $\Sigma = \{(n, \xi)\}$ where n is any non-negative integer, ξ any non-negative real number and $(n, \xi) \neq (0, 0)$. Order is lexicographic. Addition is defined by $(n, \xi) + (m, \eta) = (n + m, \eta)$ if $m > 0$ and $= (n, \xi + \eta)$ if $m = 0$.

7.2. Independence of the axioms § 1.2 for systems

Examples O_1a, O_1b, $A_2^* r$, of § 7.1 still aplly. Example AO_1l proves the independence of (Arch). For the independence of (AO_1r) see example 4 loc. cit. [4]). The independence of (A_1r) follows taking Σ as the set of all non-negative integers with the usual order and addition but letting $a + 0$ undefined for all a; (A_1r) is false as $0 + (0 + 1)$ is defined, but $(0 + 0) + 1$ is not. [(Arch) holds as 2.0 is undefined.] This example shows that (A_1r) cannot even be proved if (O_2), (A_1l) are valid.

§ 8. Groups with archimedean cyclic order

Let $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ be a (multiplicative) group with neutral element 1. G is a *group with archimedean cyclic order* if a triadic relation C, written (α, β, γ), is defined in G satisfying

(C_1) For any α, β, γ exactly one of the following three cases holds: (i) (α, β, γ), (ii) (α, γ, β), (iii) two or all of α, β, γ are equal *(trichotomy law)*,

(C_2) (α, β, δ), (β, γ, δ) imply (α, γ, δ) *(transitive law)*,

(MCr) (α, β, γ) implies $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$ *(right monotonic law)*,

(ArchC) To any element α of infinite order there exists a natural number n such that $(\alpha^n, \alpha, 1)$ *(law of Archimedes)*.

Rieger's axiom[13])

(C_3) (α, β, γ) implies (β, γ, α)

[15]) It is an open question whether or not (AO_1l) can be replaced by $(A_2^* l)$ in the system of axioms.

is a consequence of (C_1) and (C_2): for (α, β, γ) implies that α, β, γ are different: hence exactly one of (β, γ, α), (β, α, γ) is true; but the latter, together with (α, β, γ), would imply (α, α, γ) which is impossible. — The left monotonic law is not needed in the archimedean case.

It is easily verified that the group U of the unimodular complex numbers, and hence any subgroup of U, satisfies the above axioms if (α, β, γ) is defined to mean

$$\mathrm{i}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^{-1} & \beta^{-1} & \gamma^{-1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

It will now be shown that, conversely, every group G with archimedean cyclic order is isomorphic to a subgroup of U. G may be transformed into a system $\Sigma(<, +)$ with greatest element 1 by defining

(O) $\alpha < \beta$ if and only if either $(\alpha, \beta, 1)$ or $\alpha \neq \beta = 1$,

(A) $\alpha + \beta = \alpha\beta$ if and only if $\alpha < \alpha\beta$.

(O_1) follows from (O) and (C_1), $(AO_1 r)$ from (A), and $(A_2^* r)$ from (A) and the right inverse law $(M_2 r)$ in G.

$(A_1 r)$ $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ if the right hand side is defined.

Proof. It is sufficient to show that the left hand side is defined (as both sides are then equal to $\alpha\beta\gamma$). As $\alpha+(\beta+\gamma)$ is defined, we have

(1) $(\alpha, \alpha\beta\gamma, 1)$ or $\alpha \neq \alpha\beta\gamma = 1$, whence $\beta\gamma \neq 1$,

(2) $(\beta, \beta\gamma, 1)$ [the alternative $\beta \neq \beta\gamma = 1$ is excluded by (1)].

From (2) and (MCr), $(\alpha\beta,\ \alpha\beta\gamma,\ \alpha)$ whence, together with (1), using (C_2) and (C_3),

(3) $(\alpha, \alpha\beta, 1)$, i.e. $\alpha < \alpha\beta$ so that $\alpha + \beta$ is defined,

(4) $(\alpha\beta, \alpha\beta\gamma, 1)$ or $\alpha\beta \neq \alpha\beta\gamma = 1$, i.e. $\alpha\beta < \alpha\beta\gamma$ so that $\alpha\beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$ is defined.

(Arch) to any α, β there exists k such that $\beta \dot{<} k\alpha$.

Proof. By (Arch$C$) $k > 1$ exists such that $(\alpha^k, \alpha, 1)$ or $\alpha^k = \alpha$, whence $\alpha^k \leq \alpha$, so that $\alpha + \alpha^{k-1}$, and hence $k\alpha$, are undefined.

By Lemma I and Theorem I (§ 2), Σ is isomorphic to a segment $0 < \xi \leq \varepsilon$ of a complete system T of positive real numbers, and hence G is isomorphic to the group $T \bmod \varepsilon$; but this is a subgroup of the group $P^+ \bmod \varepsilon$ which is isomorphic to U.

Department of Mathematics, University of Melbourne (Australia)

(Eingegangen am 19. Juli 1955)

Siegel, C. L.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 363—373 (1956)

Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen

Issai Schur zum Gedächtnis

Von
Carl Ludwig Siegel

1. Die Eisensteinschen Reihen für die vierten bis achten Potenzen der Funktion

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} \qquad (\tau = \xi + i\eta,\ \eta > 0)$$

sind zuerst von Hardy unter Benutzung der Kreismethode gewonnen worden. Bei Annäherung an einen rationalen Randpunkt a/c der oberen τ-Halbebene gilt nämlich

$$(c\tau - a)^{\frac{1}{2}} \vartheta(\tau) \to \gamma\left(\frac{a}{c}\right) \qquad (c > 0,\ (a, c) = 1),$$

wobei $\gamma(a/c)$ eine achte Einheitswurzel oder 0 ist, und als Eisensteinsche Entwicklung der Potenzen von $\vartheta(\tau)$ ergibt sich dann mittels der Theorie der Modulfunktionen

$$\vartheta^m(\tau) = 1 + \sum_{a/c} \gamma^m\left(\frac{a}{c}\right)(c\tau - a)^{-\frac{m}{2}} \qquad (m = 4, \ldots, 8). \tag{1}$$

Hierin durchläuft a/c alle rationalen Zahlen, und im Falle $m = 4$ hat man wegen der bedingten Konvergenz zuerst über a bei festem c und sodann über c zu summieren. Die Hardysche Formel war der Ausgangspunkt für die Untersuchungen des Verfassers zur analytischen Theorie der quadratischen Formen, wodurch (1) als Spezialfall eines allgemeineren Satzes erkannt wurde.

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie der Eisensteinschen Reihen bildet bekanntlich der von Hecke eingeführte Konvergenz erzeugende Faktor $|c\tau - a|^{-z}$ $(z = x + iy,\ x > 0)$. Fügt man diesen Faktor dem allgemeinen Gliede in der Summe bei (1) hinzu, so entsteht die Dirichletsche Reihe

$$\Phi_m(\tau, z) = 1 + \sum_{a/c} \gamma^m\left(\frac{a}{c}\right)(c\tau - a)^{-\frac{m}{2}} |c\tau - a|^{-z},$$

welche in der Halbebene $x > 2 - \frac{m}{2}$ absolut konvergiert. Wie Maasz erkannt hat, ist die analytische Funktion $\Phi_m(\tau, z)$ von z auch für $m = 1, 2, 3, 4$ nach $z = 0$ eindeutig fortsetzbar, und insbesondere ist $\Phi_m(\tau, 0) = \vartheta^m(\tau)$ für $m = 1, 3, 4$, während $\Phi_2(\tau, 0) = 2\vartheta^2(\tau)$ wird. Es ist nun bemerkenswert, daß sich $\Phi_m(\tau, z)$

als eine meromorphe Funktion von z erweist, welche einer einfachen Funktionalgleichung genügt. Dies ist übrigens nur ein Spezialfall eines Satzes über Dirichletsche Reihen, die sich in analoger Weise jeder ganzwertigen definiten oder indefiniten quadratischen Form von m Variabeln zuordnen lassen; doch soll weiterhin nur der Fall $m=1$ diskutiert werden.

Verwendet man Riemanns Idee der Integraldarstellung von $\zeta(s)$ mittels der Thetafunktion, so gewinnt man aus $\Phi_1(\tau, z)$ eine meromorphe Funktion der zwei Veränderlichen s, z, welche für $z=0$ in $\zeta(s)$ übergeht und sowohl in s als auch in z je einer Funktionalgleichung genügt. Es wäre noch von Interesse, die Verteilung der Nullstellen dieser Funktion in Abhängigkeit von dem Parameter z näher zu verfolgen.

2. Für die drei Funktionen

$$\vartheta_1(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}, \qquad \vartheta_2(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i n^2 \tau}, \qquad \vartheta_3(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+\frac{1}{2})^2 \tau}$$

gelten die Transformationsformeln

$$(2)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(\tau+1)=\vartheta_2(\tau), & \vartheta_2(\tau+1)=\vartheta_1(\tau), & \vartheta_3(\tau+1)=\sqrt{i}\,\vartheta_3(\tau), \\ \vartheta_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_1(\tau), & \vartheta_2\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_3(\tau), & \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\vartheta_2(\tau). \end{cases}$$

Um hieraus entsprechende Formeln für eine beliebige Modulsubstitution

$$\tau_M=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \qquad M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

zu gewinnen, beachte man, daß die Modulgruppe durch $\tau_1=\tau+1$ und $\tau_2=-\tau^{-1}$ erzeugt wird. Es ergibt sich aus (2) ein Transformationsgesetz der Gestalt

$$(3)\qquad \vartheta(\tau_M)=Q(M,\tau_M)\,\vartheta(\tau).$$

Dabei bedeutet $\vartheta(\tau)$ die aus $\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \vartheta_3(\tau)$ gebildete Spalte, und der Ausdruck

$$(4)\qquad (c\tau+d)^{-\frac{1}{2}}\,Q(M,\tau_M)=(a-c\tau)^{\frac{1}{2}}\,Q(M,\tau)$$

ist eine von τ unabhängige monomiale dreireihige Matrix, deren von 0 verschiedene Elemente achte Einheitswurzeln sind. Für die Einheitsmatrix $M=E$ ist speziell $Q(E,\tau)=E$, und ebenso ist $Q(M,\tau)=Q(-M,\tau)$ trivial. Ist auch L eine Modulmatrix, so folgt aus (3) die Kompositionsformel

$$(5)\qquad Q(ML,\tau_M)=Q(M,\tau_M)\,Q(L,\tau).$$

Zwecks näherer Untersuchung von $Q(M,\tau)$ als Funktion von M setze man in der Hermiteschen Bezeichnung

$$\Theta(\tau)=\Theta_{\delta\varepsilon}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{\varepsilon n} e^{\pi i\left(n+\frac{\delta}{2}\right)^2\tau}$$

mit ganzen δ, ε und erhält in üblicher Weise aus der Zerlegung

$$\Theta\left(\tau+\frac{a}{c}\right)=\sum_{h=1}^{2c}(-1)^{\varepsilon h}\,e^{\pi i\left(h+\frac{\delta}{2}\right)^2\frac{a}{c}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi i\left(2cn+h+\frac{\delta}{2}\right)^2\tau}\qquad(c>0)$$

bei dem Grenzübergang $\eta\to 0$, $\xi^2\eta^{-1}\to 0$ die Beziehung

$$(6)\qquad \sqrt{c\,\tau}\,\vartheta_k\left(\tau+\frac{a}{c}\right)\to\frac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{c}}\sum_{h=1}^{2c}(-1)^{\varepsilon_k h}\,e^{\pi i\left(h+\frac{\delta_k}{2}\right)^2\frac{a}{c}}=\lambda_k\left(\frac{-a}{c}\right)\quad(k=1,2,3)$$

mit $\delta_1=0$, $\varepsilon_1=0$, $\delta_2=0$, $\varepsilon_2=1$, $\delta_3=1$, $\varepsilon_3=0$. Der Grenzwert $\lambda_k\left(\frac{-a}{c}\right)$ hängt also bei jedem festen c für $k=1,2$ nur von der Restklasse von a modulo $2c$ ab, und für $k=3$ nur von der Restklasse von a modulo $8c$. Ersetzt man in (6) noch τ durch

$$\tau_M\quad{}^{a}_{c}=\frac{-1}{c(c\,\tau+d)}$$

mit $\xi=0$ und $\eta\to\infty$, so ergibt sich mittels (3), (4) die gewünschte Formel

$$(7)\qquad (c\,\tau-a)^{\frac{1}{2}}\,Q(M,\tau)\,\vartheta(\infty)=\lambda\left(\frac{-a}{c}\right)\qquad(c>0),$$

wobei $\vartheta_k(\infty)$ den Grenzwert von $\vartheta_k(\tau)$ für $\eta\to\infty$ bedeutet, nämlich $\vartheta_1(\infty)=1$, $\vartheta_2(\infty)=1$, $\vartheta_3(\infty)=0$, und $\lambda\left(\frac{-a}{c}\right)$ die Spalte der $\lambda_k\left(\frac{-a}{c}\right)$.

3. Man zerlege die Modulgruppe in Linksklassen bezüglich der Untergruppe der ganzen Modulsubstitutionen, bei denen also $c=0$ ist. Die Klassen sind dann den parabolischen Fixpunkten der Modulgruppe umkehrbar eindeutig zugeordnet, d.h. den rationalen Zahlen r mit Einschluß von ∞, und zwar liegen genau alle diejenigen $M=M_r$ in derselben Klasse, für welche ${}^{a}_{c}=r$ ist. Indem man aus jeder Klasse einen Repräsentanten M_r herausgreift, bilde man mit der komplexen Variabeln $z=x+iy$ die Dirichletsche Reihe

$$(8)\qquad \varphi(\tau,z)=\eta^{z/2}\sum_{r}Q(M_r,\tau)\,\vartheta(\infty)\,|c\,\tau-a|^{-z}\qquad(x>\tfrac{3}{2}).$$

Vermöge (7) ist ersichtlich, daß die Glieder von der Auswahl der Klassenvertreter unabhängig sind. Bedeutet η_M den imaginären Teil von τ_M, so ist ferner

$$(9)\qquad \eta\,|c\,\tau-a|^{-2}=\eta_{M_r^{-1}}.$$

Nun durchläuft aber für irgendeine feste Modulmatrix M mit M_r auch $M\,M_r$ ein volles System von Repräsentanten, und man kann in (8) daher M_r durch $M\,M_r$ ersetzen. Aus (5), (9) folgt jetzt

$$(10)\qquad \varphi(\tau_M,z)=Q(M,\tau_M)\,\varphi(\tau,z),$$

das gleiche Gesetz der Transformation wie für $\vartheta(\tau)$.

Nach (7) gilt andererseits die Formel

$$(11)\quad \eta^{-\frac{z}{2}}\varphi(\tau,z)-\vartheta(\infty)=\sum_{a/c}\lambda\left(\frac{a}{c}\right)c^{-z-\frac{1}{2}}\left(\tau+\frac{a}{c}\right)^{-\frac{z+1}{2}}\left(\bar{\tau}+\frac{a}{c}\right)^{-\frac{z}{2}},$$

wo a/c alle gekürzten Brüche mit positiven Nennern durchläuft. Es ist die rechte Seite in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln. Sind α, β komplexe Zahlen und die Realteile von $\alpha, \beta, \alpha+\beta-1$ positiv, so gilt die Fouriersche Entwicklung

$$i^{\alpha-\beta}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\tau+l)^{-\alpha}(\bar{\tau}+l)^{-\beta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varrho_n(\eta,\alpha,\beta)\,e^{2\pi i n\xi}$$

mit

$$(12)\quad \varrho_0(\eta,\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}(2\eta)^{1-\alpha-\beta},$$

$$(13)\quad (2\pi)^{-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,|n|^{1-\alpha-\beta}e^{2\pi|n|\eta}\varrho_n(\eta,\alpha,\beta)=\begin{cases}\sigma(4\pi n\eta,\alpha,\beta) & (n>0)\\ \sigma(-4\pi n\eta,\beta,\alpha) & (n<0),\end{cases}$$

$$(14)\quad \sigma(\eta,\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}(u+1)^{\alpha-1}u^{\beta-1}e^{-\eta u}\,du.$$

Hierin ersetze man $\alpha, \beta, \tau, \eta$ durch $\frac{z+1}{2}, \frac{z}{2}, q_k^{-1}\left(\tau+\frac{a}{c}\right), q_k^{-1}\eta$ mit $q_1=q_2=2$, $q_3=8$. Entsprechend der oben bemerkten Periodizität von $\lambda_k\left(\frac{a}{c}\right)$ wird dann

$$(15)\quad \begin{cases}\displaystyle\sum_{a/c}\lambda_k\left(\frac{a}{c}\right)c^{-z-\frac{1}{2}}\left(\tau+\frac{a}{c}\right)^{-\frac{z+1}{2}}\left(\bar{\tau}+\frac{a}{c}\right)^{-\frac{z}{2}}\\ \qquad=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}j_k(n,z)\,\varrho_n\left(\frac{\eta}{q_k},\frac{z+1}{2},\frac{z}{2}\right)e^{2\pi i\frac{n}{q_k}\xi},\end{cases}$$

wobei die Abkürzung

$$j_k(n,z)=i^{-\frac{1}{2}}\sum_{a/c\,(\mathrm{mod}\,q_k)}\lambda_k\left(\frac{a}{c}\right)(q_k c)^{-z-\frac{1}{2}}e^{2\pi i\frac{na}{q_k c}}$$

eingeführt ist. Unter Benutzung der Definition von $\lambda_k\left(\frac{a}{c}\right)$ in (6) folgt

$$(16)\quad \zeta(z)\,j_k(n,z)=q_k^{-z-\frac{3}{2}}\sum_{c=1}^{\infty}c^{-z-1}\sum_{h\,(\mathrm{mod}\,q_k c)}(-1)^{\varepsilon_k h}\sum_{a\,(\mathrm{mod}\,q_k c)}e^{2\pi i\frac{a}{q_k c}\left\{n-\frac{q_k}{2}\left(h+\frac{\delta_k}{2}\right)^2\right\}}.$$

4. Die innere Summe in (16) ist $q_k c$, falls

$$\frac{q_k}{2}\left(h+\frac{\delta_k}{2}\right)^2\equiv n\pmod{q_k c}$$

ist, und sonst 0. Daher ist insbesondere $j_3(n,z)=0$, wenn nicht $n\equiv 1 \pmod 8$ ist, und

$$(17)\quad j_2(n,z)=(-1)^n j_1(n,z).$$

Weiterhin sei stets $n\equiv 1 \pmod 8$ im Falle $k=3$.

Für jede natürliche Zahl m sei $A_m(n)$ die Anzahl der modulo m inkongruenten Lösungen von $x^2 \equiv n \pmod m$. Bedeutet p eine Primzahl, so setze man

$$f_p(n,z) = (1-p^{-z}) \sum_{l=0}^{\infty} A_{p^l}(n)\, p^{-lz} \qquad (p \neq 2),$$

$$f_2(n,z) = (2^z - 1) \sum_{l=1}^{\infty} A_{2^l}(n)\, 2^{-lz}$$

und erhält aus (16) die Produktdarstellungen

$$(18) \qquad j_1(n,z) = 2^{-z-\frac{1}{2}} \prod_p f_p(n,z), \qquad j_3(n,z) = 2^{-2z+\frac{3}{2}} \prod_{p>2} f_p(n,z).$$

Es sei nun n^* die Diskriminante des durch $\sqrt{n}$ $(n \neq 0)$ erzeugten Körpers und $p^{2\alpha}$ die höchste in n/n^* aufgehende Potenz der Primzahl p, ferner $\chi_n(p) = \left(\frac{n^*}{p}\right)$ das Kroneckersche Symbol. Nach einfacher Rechnung ergibt sich dann

$$(19) \qquad \frac{1-\chi_n(p)\,p^{-z}}{1-p^{-2z}} f_p(n,z) = \begin{cases} p^{\alpha(1-2z)} + \left(1-\chi_n(p)\,p^{-z}\right) \sum_{l=0}^{\alpha-1} p^{l(1-2z)} & (p \neq 2) \\ \frac{1+\chi_n(2)}{1+2^{-z}} + \left(2^{1-z} - \chi_n(2)\right) \sum_{l=0}^{\alpha} 2^{l(1-2z)} & (p = 2). \end{cases}$$

Dies gilt sinngemäß auch für $n = 0$, nämlich

$$(1-p^{1-2z})\, f_p(0,z) = \begin{cases} 1-p^{-2z} & (p \neq 2) \\ (1-2^{-z})(1+2^{1-z}) & (p = 2). \end{cases}$$

Daher wird

$$\prod_p f_p(0,z) = \frac{(1+2^{1-z})\,\zeta(2z-1)}{(1+2^{-z})\,\zeta(2z)}$$

und

$$(20) \qquad \prod_{p \nmid 2n} f_p(n,z) = \frac{L_n(z)}{\zeta(2z)} \prod_{p \mid 2n} \frac{1-\chi_n(p)\,p^{-z}}{1-p^{-2z}} \qquad (n \neq 0),$$

wo $L_n(z)$ die zum Charakter χ_n gehörige Dirichletsche L-Reihe bedeutet.

In Verbindung mit (17), (18), (19) erweist sich für $n \neq 0$ der Quotient von $(1+2^z)\,\zeta(2z)\,j_k(n,z)$ und $L_n(z)$ als eine ganze Funktion von z, nämlich als eine endliche Dirichletsche Reihe der Variabeln z, welche durch den Ausdruck

$$(21) \qquad \frac{3}{2} \sum_{t \mid \frac{4n}{n^*}} t^{\frac{1}{2}-x} = O\left(\left(\frac{4n}{n^*}\right)^{\mu}\right) \qquad \left(\mu > 0,\ \mu > \frac{1}{2} - x\right)$$

gleichmäßig in x majorisiert wird, während

$$(22) \qquad j_k(0,z) = \frac{(1+2^{1-z})\,\zeta(2z-1)}{2^{\frac{1}{2}}\,(1+2^z)\,\zeta(2z)} \qquad (k = 1, 2)$$

ist. Insbesondere ist $j_k(n,z)$ regulär in der Halbebene $x \geqq \frac{1}{2}$, mit etwaiger Ausnahme von $z = 1$. In diesem Punkte tritt auch noch Regularität ein,

wenn nicht $n=0$ oder $n^*=1$ ist. In letzteren Fällen ist n eine Quadratzahl und $z=1$ ein Pol erster Ordnung. Als Residuum findet man $\pi^{-2}\sqrt{2}$ für $n=0$ und $\pi^{-2}\sqrt{8}$ $(k=1)$, $\pi^{-2}\sqrt{8}$ $(k=2)$, $\pi^{-2}\sqrt{2}$ $(k=3)$ für $n^*=1$.

5. Die analytische Fortsetzung von $\varrho_n\left(\frac{\eta}{q_k}, \frac{z+1}{2}, \frac{z}{2}\right)$ in die ganze z-Ebene ergibt sich zufolge (13), (14) aus der bekannten Darstellung der Funktion $\sigma(\eta, \alpha, \beta)$ durch ein Schleifenintegral. Danach ist $(1-e^{2\pi i\beta})\,\sigma(\eta, \alpha, \beta)$ eine ganze Funktion der Variabeln α, β, welche der Funktionalgleichung

$$\Gamma(1-\alpha)\,\sigma(\eta, \alpha, \beta) = \Gamma(\beta)\,\eta^{1-\alpha-\beta}\,\sigma(\eta, 1-\beta, 1-\alpha)$$

genügt. Daher wird

$$(23)\quad \begin{cases} \varrho_n\left(\frac{\eta}{q_k}, 1-\frac{z}{2}, \frac{1-z}{2}\right) \\ \qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(z)\left(\frac{2\pi q_k|n|}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}-z}\varrho_n\left(\frac{\eta}{q_k}, \frac{z+1}{2}, \frac{z}{2}\right)\begin{cases}\sin\frac{\pi z}{2} & (n>0)\\ \cos\frac{\pi z}{2} & (n<0),\end{cases} \end{cases}$$

und (12) liefert noch explizit

$$(24)\qquad \varrho_0\left(\frac{\eta}{2}, \frac{z+1}{2}, \frac{z}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)}\,2^z\,\eta^{\frac{1}{2}-z}.$$

Benutzt man (11), (15) und die bei (21) gegebene Abschätzung, so wird ersichtlich, daß die drei Funktionen $\varphi_k(\tau, z)$ in z meromorph sind. Für $x>0$, $z\neq 1$ ist $\varphi_k(\tau, z)$ regulär. Bei $z=1$ liegt ein Pol erster Ordnung vor, und als Residuum ergibt sich

$$\pi^{-2}\sqrt{2}\left(2\pi + 2\sum_{m=1}^{\infty} 2\pi\, e^{\pi i m^2\tau}\right) = \pi^{-1}\sqrt{8}\,\vartheta_1(\tau) \qquad (k=1),$$

$$\pi^{-2}\sqrt{2}\sum_{m=0}^{\infty} 4\pi\, e^{\pi i(m+\frac{1}{2})^2\tau} = \pi^{-1}\sqrt{8}\,\vartheta_3(\tau) \qquad (k=3)$$

und analog $\pi^{-1}\sqrt{8}\,\vartheta_2(\tau)$ für $k=2$.

Man definiere noch

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \varrho(z), \qquad \left(2^{\frac{z}{2}} + 2^{-\frac{z}{2}}\right)\varrho(2z) = \omega(z).$$

Dann ist die Funktion

$$(25)\qquad \varphi(\tau, z)\,\omega(z) = \psi(\tau, z)$$

ebenfalls meromorph in der Variabeln z, und in der Halbebene $x>0$ liegt nur ein Pol, und zwar von erster Ordnung, bei $z=1$. Das Residuum ist dort $\vartheta(\tau)$.

6. Es soll nun die Funktionalgleichung

$$(26)\qquad \psi(\tau, z) = \psi(\tau, 1-z)$$

bewiesen werden.

Mit der Abkürzung

$$\eta^{z/2}\,\omega(z)\,j_k(n,z)\,\varrho_n\Big(\frac{\eta}{q_k},\ \frac{z+1}{2},\ \frac{z}{2}\Big)=g_{kn}(\eta,z)\qquad(k=1,2,3)$$

gilt nach (11), (15), (22), (24), (25) die Fouriersche Entwicklung

$$\psi_k(\tau,z)=\vartheta_k(\infty)\Big(\eta^{\frac{z}{2}}\Big(2^{\frac{z}{2}}+2^{-\frac{z}{2}}\Big)\varrho(2z)+\eta^{\frac{1-z}{2}}\Big(2^{\frac{1-z}{2}}+2^{\frac{z-1}{2}}\Big)\varrho(2z-1)\Big)+$$

$$+\sum_{n\neq 0}g_{kn}(\eta,z)\,e^{2\pi i\frac{n}{q_k}\xi}.$$

Benutzt man jetzt (23) und die Funktionalgleichung von $\zeta(z)$, so folgt für die Differenz

$$\chi_k(\tau,z)=\psi_k(\tau,z)-\psi_k(\tau,1-z)$$

die Formel

$$\chi_k(\tau,z)=\sum_{n\neq 0}h_{kn}(\eta,z)\,e^{2\pi i\frac{n}{q_k}\xi}$$

mit

$$(27)\quad\begin{cases}h_{kn}(\eta,z)=g_{kn}(\eta,z)-g_{kn}(\eta,1-z)\\ \qquad=\eta^{z/2}\,\varrho_n\Big(\frac{\eta}{q_k},\ \frac{z+1}{2},\ \frac{z}{2}\Big)\Big(\omega(z)\,j_k(n,z)+\\ \quad-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(z)\,(2\pi q_k|n|)^{\frac{1}{2}-z}\,\omega(1-z)\,j_k(n,1-z)\begin{cases}\sin\frac{\pi z}{2}&(n>0)\\ \cos\frac{\pi z}{2}&(n<0).\end{cases}\end{cases}$$

Man beachte, daß der Ausdruck in der großen Klammer nicht von η abhängt.

Da $\varrho_n\Big(\frac{\eta}{q_k},\ \frac{z+1}{2},\ \frac{z}{2}\Big)$ zufolge (13), (14) für $\eta\to\infty$ exponentiell verschwindet, so ist $\eta^{\frac{1}{4}}\chi_k(\tau,z)$ als Funktion von τ im Fundamentalbereich der Modulgruppe beschränkt, also nach (10), (25) in der ganzen oberen τ-Halbebene. Daher ist auch

$$(28)\qquad h_{kn}(\eta,z)=q_k^{-1}\int_0^{q_k}\chi_k(\tau,z)\,e^{-2\pi i\frac{n}{q_k}\xi}\,d\xi=O(\eta^{-\frac{1}{4}})\qquad(\eta\to 0).$$

Andererseits gelten nach (13), (14) für $\eta\to 0$ die Beziehungen

$$\sigma(\eta,\alpha,\beta)\sim\Gamma(\alpha+\beta-1)\,\eta^{1-\alpha-\beta},$$

$$(29)\qquad\varrho_n\Big(\frac{\eta}{q_k},\ \frac{z+1}{2},\ \frac{z}{2}\Big)\sim\sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)}\Big(\frac{\eta}{q_k}\Big)^{\frac{1}{2}-z}\qquad(x>\tfrac{1}{2}),$$

wobei die Realteile von $\alpha+\beta-1,\beta$ als positiv vorausgesetzt werden. Für $x>\frac{3}{2}$ ist nun aber

$$\eta^{-\frac{1}{4}}=o\Big(\eta^{\frac{1-x}{2}}\Big)\qquad(\eta\to 0).$$

Aus (27), (28), (29) folgt demnach

$$(30)\quad \omega(z)\,j_k(n,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(z)\,(2\pi q_k|n|)^{\frac{1}{2}-z}\,\omega(1-z)\,j_k(n,1-z)\begin{cases}\sin\frac{\pi z}{2} & (n>0)\\ \cos\frac{\pi z}{2} & (n<0)\end{cases}$$

und

$$h_{kn}(\eta,z)=0,\qquad \chi_k(\tau,z)=0,$$

also die Behauptung (26).

In (30) sind wegen (18), (20) die Funktionalgleichungen der L-Reihen $L_n(z)$ enthalten. Umgekehrt läßt sich aus diesen wiederum (30) und damit (26) folgern.

Da $\omega(z)$ bei $z=0$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum -1 hat, so erhält man

$$(31)\qquad \varphi(\tau,0)=\vartheta(\tau).$$

7. Es verdient bemerkt zu werden, daß sich (26) auch ohne Benutzung der Funktionalgleichung für $\zeta(z)$ gewinnen läßt, wobei sich dann diese zugleich ergibt. Für die Funktion

$$\mu_k(\tau,z)=\varrho(1-2z)\,\psi_k(\tau,z)-\varrho(2z)\,\psi_k(\tau,1-z)$$

findet man die Fouriersche Entwicklung

$$\mu_k(\tau,z)=\vartheta_k(\infty)\,\eta^{\frac{1-z}{2}}\left(2^{\frac{1-z}{2}}+2^{\frac{z-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(\varrho(1-2z)\,\varrho(2z-1)-\varrho(2z)\,\varrho(2-2z)\right)+\sum_{n\neq 0} f_{kn}(\eta,z)\,e^{2\pi i\frac{n}{q_k}\xi},$$

wo $f_{kn}(\eta,z)$ aus dem Ausdruck für $h_{kn}(\eta,z)$ in (27) dadurch hervorgeht, daß man bei $\omega(z),\omega(1-z)$ die Faktoren $\varrho(1-2z)$, $\varrho(2z)$ hinzufügt. Für $x>\frac{3}{2}$ gilt dann auch (28) mit $f_{kn}(\eta,z)$, $\mu_k(\tau,z)$ an Stelle von $h_{kn}(\eta,z)$, $\chi_k(\tau,z)$, und man kann die frühere Schlußweise durchführen. Es folgt jetzt

$$f_{kn}(\eta,z)=0,\qquad \varrho(1-2z)\,\varrho(2z-1)=\varrho(2z)\,\varrho(2-2z),\qquad \mu_k(\tau,z)=0.$$

Nach (18), (19) ist speziell

$$j_1(1,z)=\frac{1+2^{-z}+2^{1-2z}}{2^{\frac{1}{2}}(1+2^z)}\,\frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)},$$

und aus dem Verschwinden von $f_{11}(\eta,z)$ erhält man weiter

$$\varrho(1-2z)\,\varrho(z)=\varrho(2z)\,\varrho(1-z),$$

also auch

$$\frac{\varrho(z)}{\varrho(1-z)}=\frac{\varrho(2^{-m}z)}{\varrho(1-2^{-m}z)}\qquad (m=1,2,\ldots).$$

Mit den leicht direkt zu beweisenden Formeln

$$\zeta(z)\sim\frac{1}{z-1}\qquad (z\to 1),\qquad \zeta\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$$

folgt dann

$$\varrho(z)\sim\frac{1}{z-1},\qquad \varrho(1-z)\sim\frac{1}{z-1}\qquad (z\to 1).$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ ergibt

$$\varrho(z) = \varrho(1-z)$$

und (26).

8. Anstatt das asymptotische Verhalten von $\sigma(\eta, \alpha, \beta)$ für $\eta \to 0$ heranzuziehen, kann man für den Nachweis des identischen Verschwindens von $\chi_k(\tau, z)$ auch folgendermaßen eine Differentialgleichung benutzen.

Sind α, β, γ Konstanten, so genügt die Funktion

$$w = \eta^\alpha \tau^\beta \bar{\tau}^\gamma$$

der homogenen linearen elliptischen Differentialgleichung

$$\eta^2(w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}) + \eta(i\mu w_\xi - \nu w_\eta) + \lambda w = 0 \tag{32}$$

mit

$$\mu = \beta - \gamma, \quad \nu = 2\alpha + \beta + \gamma, \quad \lambda = \alpha(1 + \alpha + \beta + \gamma) = \alpha(1 - \alpha + \nu).$$

Diese Differentialgleichung bleibt ungeändert, wenn τ durch $\tau + h$ mit einer reellen Konstanten h ersetzt wird. Sie geht ferner in sich über, wenn α, β, γ durch

$$\alpha' = 1 + \alpha + \beta + \gamma, \quad \beta' = -1 - \gamma, \quad \gamma' = -1 - \beta$$

ersetzt werden.

Es sei u der reelle Teil einer Lösung $w = u + iv$ von (32), und es seien λ, μ, ν reell. Nach (32) ist dann

$$\eta^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - \eta(\mu v_\xi + \nu u_\eta) + \lambda u = 0.$$

Hat nun $w\bar{w} = u^2 + v^2$ irgendwo ein Maximum > 0 und ist dort w reell, also $v = 0$, $u^2 > 0$, so ist dort

$$\begin{gathered} u_\xi = 0, \quad u_\eta = 0, \quad u u_{\xi\xi} + v_\xi^2 \leqq 0, \quad u u_{\eta\eta} + v_\eta^2 \leqq 0 \\ u(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + v_\xi^2 + v_\eta^2 \leqq 0 \\ (2\eta v_\xi + \mu u)^2 + (2\eta v_\eta)^2 \leqq (4\lambda + \mu^2) u^2 \\ 4\lambda + \mu^2 \geqq 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Speziell sei $\alpha = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}$, $\beta = -\frac{z}{2} - \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{z}{2}$, also $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu = 0$, $4\lambda = 4\alpha(1-\alpha) = 1 - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$, ferner $\alpha' = \frac{3}{4} - \frac{z}{2}$, $\beta' = \frac{z}{2} - 1$, $\gamma' = \frac{z}{2} - \frac{1}{2}$. Da $\nu = 0$ ist, so genügt $w = \eta^\alpha$ ebenfalls der Differentialgleichung (32), also nach (11) auch die Funktion $\eta^{\frac{1}{4}} \varphi(\tau, z)$; zunächst für $x > \frac{3}{2}$, und sodann nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung in der ganzen z-Ebene. Nun gehen aber α', β', γ' aus α, β, γ durch Vertauschung von z mit $1 - z$ hervor, und folglich ist auch die Funktion $\eta^{\frac{1}{4}} \varphi(\tau, 1-z)$ eine Lösung von (32). Damit ist auch

$$\delta(\tau, z) = \eta^{\frac{1}{4}} \mu(\tau, z) = \eta^{\frac{1}{4}} \left(\varrho(1-2z)\, \omega(z)\, \varphi(\tau, z) - \varrho(2z)\, \omega(1-z)\, \varphi(\tau, 1-z)\right)$$

als Lösung von (32) erkannt.

Andererseits ist nach (10) der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{3} \delta_k \bar{\delta}_k = \sigma = \sigma(\tau, z)$$

in Abhängigkeit von τ bei der Modulgruppe invariant. Speziell sei z reell und $z = x > \frac{3}{2}$. Dann strebt $\sigma(\tau, z)$ gegen 0, wenn τ im Fundamentalbereich der Modulgruppe nach ∞ geht. Ist σ nicht identisch 0, so wird für ein endliches τ ein positives Maximum erreicht. Indem man noch $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ einer geeigneten konstanten unitären Transformation unterwirft, kann man voraussetzen, daß bei jenem τ die Werte $\delta_1 = \sigma^{\frac{1}{2}}$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$ sind. Dann hat also $\delta_1 \bar{\delta}_1$ selber bei τ ein positives Maximum, und δ_1 ist dort reell. Da für reelles z auch α, β, γ reell sind, so liefert (33) die Bedingung

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{5}{4}, \qquad x \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Für $x > \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ folgt also $\sigma = 0$, womit wieder die Funktionalgleichung bewiesen ist.

9. Nach dem Vorbild von Riemanns Integraldarstellung der Zetafunktion bilde man mit $s = \sigma + it$ die Funktion

$$\varrho(s,z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta^{\frac{s}{2}} \left(\varphi_1(i\eta, z) - \eta^{-\frac{z}{2}} - \frac{\omega(1-z)}{\omega(z)} \eta^{\frac{1-z}{2}} \right) \frac{d\eta}{\eta}, \tag{34}$$

wobei über positive η integriert wird. Aus den Reihendarstellungen (11), (15) findet man in Verbindung mit der Abschätzung bei (21), daß das Integral in der Halbebene $\sigma > \mathrm{Max}(1+x, 2-x)$ absolut konvergiert und gliedweise Integration vorgenommen werden kann. So erhält man in dieser Halbebene die Entwicklung

$$\varrho(s,z) = 2^{z-1} \pi^{\frac{z-s}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+z}{2}\right)}{\Gamma(z)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{z-s-1}{2}} \left(j_1(n,z)\, G(s,z) + j_1(-n,z)\, H(s,z) \right) \tag{35}$$

mit

$$G(s,z) = \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} (u+1)^{-\frac{s+z}{2}} (u+2)^{\frac{z-1}{2}}\, du,$$

$$H(s,z) = \int_0^\infty u^{\frac{z-1}{2}} (u+1)^{-\frac{s+z}{2}} (u+2)^{\frac{z}{2}-1}\, du.$$

Andererseits ist

$$\varphi_1(i\eta^{-1}, z) = \eta^{\frac{1}{2}} \varphi_1(i\eta, z),$$

und dies ergibt die für alle s, z gültige Formel

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho(s,z) = {} & \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(\eta^{\frac{s}{2}} + \eta^{\frac{1-s}{2}} \right) \varphi_1(i\eta, z) \frac{d\eta}{\eta} + \\ & - \left(\frac{1}{s+z} + \frac{1}{1-s+z} \right) - \frac{\omega(1-z)}{\omega(z)} \left(\frac{1}{1+s-z} + \frac{1}{2-s-z} \right). \end{aligned} \right. \tag{36}$$

Folglich ist $z(1-z)(s+z)(1-s+z)(1+s-z)(2-s-z)\,\omega(z)\,\varrho(s,z)$ eine ganze Funktion von s, z, und es gelten die beiden Funktionalgleichungen

$$\varrho(1-s,z)=\varrho(s,z), \qquad \omega(z)\,\varrho(s,z)=\omega(1-z)\,\varrho(s,1-z).$$

Wegen (31) geht (36) bei $z=0$ in

$$\varrho(s,0)=\frac{1}{2}\int_1^\infty\left(\eta^{\frac{s}{2}}+\eta^{\frac{1-s}{2}}\right)\vartheta_1(i\eta)\,\frac{d\eta}{\eta}-\frac{1}{s(1-s)}$$

über, während (35) zu

$$\varrho(s,0)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\zeta(s)$$

führt.

Trägt man in (34) für $\varphi_1(i\eta,z)$ nach (11) die Eisensteinsche Reihe ein, so gewinnt man schließlich die Entwicklung

$$2\varrho(s,z)=\sum_{\frac{a}{c}>0}a^{\frac{s-z-1}{2}}\,c^{-\frac{s+z}{2}}\left(\lambda_1\left(\frac{a}{c}\right)P(s,z)+\lambda_1\left(\frac{-a}{c}\right)Q(s,z)\right)$$

mit

$$P(s,z)=\int_0^\infty\eta^{\frac{s+z}{2}-1}(1+i\eta)^{\frac{z+1}{2}}(1-i\eta)^{-\frac{z}{2}}\,d\eta,$$

$$Q(s,z)=\int_0^\infty\eta^{\frac{s+z}{2}-1}(1+i\eta)^{-\frac{z}{2}}(1-i\eta)^{-\frac{z+1}{2}}\,d\eta$$

im Streifen $2-x<\sigma<x-1$. Für $x>\frac{3}{2}$ läßt sich diese Formel benutzen, um die Verteilung der Nullstellen von $\varrho(s,z)$ auf $\sigma=\frac{1}{2}$ zu untersuchen.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 27. Juli 1955)

Freudenthal, H.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 374—405 (1956)

Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems*)

Issai Schur zum Gedächtnis

Von
Hans Freudenthal

Einleitung

Riemanns Habilitationsvortrag von 1854 „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" wurde erst 1867 von Dedekind veröffentlicht, und fast gleichzeitig erschien Helmholtz' Abhandlung „Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", die im Titel eine deutliche Spitze gegen Riemann verrät. Gegen Riemann, der als philosophischer Schüler Herbarts höchstens die *Topologie* des Raumes als unhypothetisch gelten läßt, und für den die *Metrik* schon Hypothese ist, wendet Helmholtz ein: Die bloße Tatsache einer Metrik erfordere schon einen Kongruenzbegriff für starre Körper. Denn wie könnte man — gäbe es keine starren Körper — Maße am selben Ort und an verschiedenen Orten vergleichen? Fundamental sei also nicht die von Riemann postulierte quadratische Maßbestimmung im Infinitesimalen, sondern die Kongruenz von starren Körpern, die dann bei der (Helmholtzschen) Lösung des Raumproblems die Existenz der quadratischen Maßbestimmung nach sich ziehe.

Natürlich ist Helmholtz' Einwand, den auch B. Erdmann mit anderen übernimmt, ungerechtfertigt. Denn die praktische Metrik erfordert nicht feste Körper, sondern nur feste Maßstäbe (also eindimensionale „Körper") als Meßgeräte, und mehr braucht Riemann nicht. Riemanns Ansatz, der von der quadratischen Differentialform ausgeht und hinterdrein, wenn es sein muß, den euklidischen oder nichteuklidischen Charakter der Geometrie durch Homogenitätsforderungen erzwingt, hat sich denn auch als fruchtbarer erwiesen als der Helmholtzsche, bei dem die Homogenität vorausgeschickt wird. Als Rechtfertigung der klassischen Metriken aber ist Helmholtz' Analyse effektvoller. Doch hat ihre erste wirklich befriedigende Formulierung fast hundert Jahre auf sich warten lassen.

Bei Helmholtz fehlt zunächst der Begriff der Gruppe, er wird immerzu implizit vorausgesetzt. Die Gruppe tritt bei ihm auf als Invarianzgruppe einer Funktion von zwei Punkten, die auf der gegebenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit variieren. Wir würden heutzutage dieser Funktion gleich die axiomatischen Forderungen auferlegen, der man eine Metrik unterwirft.

*) Die Resultate sind vorläufig mitgeteilt worden auf dem Internationalen Mathematikerkongreß, Amsterdam 1954, und auf der Berliner Riemann-Tagung 1954.

Hält man $k(\leqq n-1)$ Punkte in allgemeiner Lage fest, so soll ein $(k+1)$-ter Punkt in allgemeiner Lage noch aller Ortsveränderungen fähig sein, die mit der Invariante verträglich sind; für $k=n$ ist keine stetige Ortsveränderung mehr zugelassen. Im Sinne dieser „freien Beweglichkeit der starren Körper" wird man Helmholtz' Hauptforderung (nach Lie) interpretieren, wenn man sich sehr große Freiheiten erlauben will. Aber ohne solche Freiheiten kann man mit ihnen überhaupt nichts anfangen, denn so exakt seine Formulierungen 1868 scheinen mochten, so verschwommen sahen sie zwanzig Jahre später aus, als Lie sie seiner Kritik unterwarf.

Helmholtz erschließt aus seinen Postulaten die euklidische und die nicht-euklidischen Geometrien, die „klassischen" Geometrien des Raumproblems (anfangs übersieht er die hyperbolische — der Zusammenhang zwischen hyperbolischer Geometrie und den Räumen konstanter negativer Krümmung war im gleichen Jahre von Beltrami entdeckt worden).

In seiner Beweisführung nahm Helmholtz die Theorie der kontinuierlichen Gruppen vorweg. Seine Methode war aber ganz unzureichend, wie Lie bemerkte. Helmholtz verwendete nicht die „freie Beweglichkeit", die er postuliert, sondern die „freie Beweglichkeit im Infinitesimalen", die tiefer einschneidet. Diese „freie Beweglichkeit im Infinitesimalen" besagt: Man betrachte die Vereine, die bestehen aus einem Punkt, einer 1-Richtung, einer 2-Richtung, ..., einer $(n-1)$-Richtung (alle in Inzidenz); über der Menge dieser Vereine sei die Gruppe transitiv. — Diese Forderung führt recht einfach, wie Lie zeigt, zu den klassischen Gruppen des Raumproblems. (Siehe auch den Weylschen Beweis!)

Lie wertet auch das Postulat der freien Beweglichkeit der starren Körper aus. Genauer gesagt, begnügt er sich mit der Forderung, die Gruppe sei transitiv über der Menge der Vereine von $n-2$ Punkten in allgemeiner Lage (wenn n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist). Er vermutet übrigens, daß man für $n>4$ mit weniger Punkten auskommt — eine Vermutung, die sich neuerdings bestätigt hat: für alle Dimensionen reicht „drei" aus.

Lie setzt natürlich voraus, daß er sich in einer genügend regulären Mannigfaltigkeit befindet, daß die Gruppe die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt; er bewegt sich immer im Kleinen und läßt sich durch topologische Schwierigkeiten, die man erst später erkannt hat, nicht beirren. Es ist schwer zu schätzen, wieviel von seinen Betrachtungen man heute noch gelten lassen will.

Der ständige Einwand, den Zeitgenossen gegen solche Betrachtungen erhoben, war der eines circulus vitiosus: in der „Zahlenmannigfaltigkeit" werde ja schon die ganze Geometrie postuliert (insbesondere auch die Unendlichkeit des Raumes, die hinterdrein in der sphärischen Geometrie wieder geleugnet werde). Auch noch 1872 — nachdem Cantor und Dedekind geometriefrei das Zahlenkontinuum definiert hatten und Weierstraß' Aufbau bekannt geworden war — hört man den Einwand noch sehr dringend, und erst seit Stolz' Wiederentdeckung der Bedeutung des Archimedischen Axioms (1881—1883) und Veroneses nicht-Archimedischer Geometrie (1890) nimmt

der Widerstand ab. Doch auch Hilberts „Grundlagen der Geometrie" begegnen ihm noch.

Im Anhang IV (1902) löst Hilbert das Raumproblem für die Ebene mit rein topologischen Mitteln. Als Substrat nimmt er die Zahlenebene (schließt also von vornherein elliptische und sphärische Geometrie aus). Von der Bewegungsgruppe F fordert er erstens, daß die Menge der Fx_1 mit $Fx_0 = x_0$ für $x_1 \neq x_0$ unendlich sei, ferner daß aus $f_n \in F$, $f_n(x_0) = x_n$, $f_n(y_0) = y_n$, $f_n(z_0) = z_n$ und $\lim x_n = x'$, $\lim y_n = y'$, $\lim z_n = z'$ die Existenz eines $f' \in F$ folge mit $f(x_0) = x'$, $f(y_0) = y'$, $f(z_0) = z'$. Durch diese zweite Forderung wird der Gruppe ungemerkt eine gewisse „Starrheit" auferlegt.

Partielle Behandlungen erfuhr das Raumproblem im weiteren Verlaufe von L. E. J. Brouwer (1909—1910), R. L. Moore (1919), Süß (1925—1927), St. S. Cairns (1923), R. G. Lubben (1928), Kérékjartó (1950), Montgomery und Zippin (1940).

Allgemein hat Kolmogorov es 1930 von neuem angegriffen. Er verlangt vom Raume R Metrisierbarkeit, Kompaktheit im Kleinen und Zusammenhang, von der Gruppe F Transitivität und eine Art von gleichmäßiger Stetigkeit, die man auch Starrheit nennen dürfte. Außerdem fordert er: Ist $x_0 \in R$, J seine Standuntergruppe ($f \in J$ bedeute: $f \in F$ und $fx_0 = x_0$), ist B eine Bahn ($= Jx_1$, $x_1 \neq x_0$) und B' eine zweite Bahn, so wird B durch B' oder B' durch B von x_0 getrennt. Auf den Bahnen sind wieder Bahnen zweiter Stufe definiert, die ebenfalls die Trennungseigenschaft besitzen sollen, usw. bis die Bahnen schließlich 0-dimensional werden.

Kolmogorov hat seinen Beweis für die Behauptung, daß die Forderungen zu den klassischen Lösungen des Raumproblems führen, nicht veröffentlicht; bis heute ist sie nur unter der zusätzlichen Voraussetzung der Vollständigkeit von F bewiesen.

Inzwischen hatten Garret Birkhoff (1941, 1944) und H. Busemann (1941, 1942) die „Invariante" der klassischen Untersuchungen wieder in den Gesichtskreis bezogen. Sie betrachteten metrische Räume und stellten Forderungen an die Gruppe der Isometrien: Jede Isometrie von Teilmengen (Birkhoff) bzw. von dreipunktigen Teilmengen (Busemann) soll zu einer Isometrie des ganzen Raumes fortgesetzt werden können. Außerdem stellten sie noch Konvexheits- und ähnliche Forderungen. Einen weiteren Schritt tat H. C. Wang (1951, 1952), der die kompakten, zusammenhängenden metrischen Räume klassifiziert, in denen jedes Punktepaar in jedes kongruente durch eine Isometrie des Raumes übergeführt werden kann. Auch die im kleinen kompakten Räume behandelte Wang, jedoch unter zusätzlichen Voraussetzungen (darunter die einer geraden Dimension). Die inzwischen erzielte Lösung von Hilberts 5. Problem greift in Wangs Untersuchungen entscheidend ein.

In einer kurzen Note (ohne Beweise) hat J. Tits (1952) die Untersuchungen zum Raumproblem zu einem gewissen Abschluß gebracht. Er ist wieder zu Kolmogorovs Ansatz zurückgekehrt. Er setzt aber von Kolmogorovs Trennungseigenschaften nur die erste voraus und klassifiziert die Räume und

Gruppen, die die Forderungen befriedigen[1]). In seinen Ergebnissen ist das von Wang enthalten. Die Trennungseigenschaft der nächsten Stufe führt bereits zu den klassischen Räumen.

Ich bin zu der vorliegenden Arbeit durch die Titssche Note angeregt worden. Ich komme mit schwächeren Voraussetzungen als Tits aus. Meine Beweismethode ist ganz verschieden von der von Tits[2]) und, wie mir scheint, einfacher.

Ich werde nun die Titssche Fassung des Raumproblems mit meiner Verschärfung auseinandersetzen. Wir verlangen vom Raum R

Kompaktheit im Kleinen und Zusammenhang.

In R wirkt eine transitive Gruppe von Homöomorphismen, die die Eigenschaften S, V, Z besitzt:

S (Starrheit): Zu je zwei abgeschlossenen Mengen A, B von R mit $A \cap B = O$, von denen mindestens eine kompakt ist, gibt es eine offene Menge $U(\neq O)$, so daß für jedes $f \in F$ die Beziehungen $f(U) \cap A \neq O$ und $f(U) \cap B \neq O$ einander ausschließen.

Das ist im wesentlichen die Forderung, der Kolmogorov den Namen „gleichmäßige Stetigkeit" gibt. Man könnte sie übrigens noch abschwächen. Sie führt zu einer gleichmäßigen Struktur in R, die bei F invariant ist. Im Sinne dieser Struktur fordert man nun

V: Vollständigkeit von F.

Es wäre interessant festzustellen, in welchem Maße diese Forderung im weiteren Verlaufe wirklich nötig ist.

Ist $x_0 \in R$, so heißt *Standuntergruppe* J von x_0 die Gruppe der $f \in F$ mit $f x_0 = x_0$. Jede Menge $J x_1$ heißt *Bahn*.

Z: Es gibt eine Bahn, die R zerlegt.

Hier stellt Tits (wie Kolmogorov) die schärfere Forderung, daß unter je zwei Bahnen $(\neq (x_0))$ eine ist, die zwischen x_0 und der anderen den Raum zerlegt.

Durch die Bedingungen S, V, Z werden die Möglichkeiten sehr stark beschränkt. Mit allgemein gruppentheoretisch-topologischen Methoden (unter anderem unter Verwendung der Yamabeschen Lösung des verallgemeinerten fünften Hilbertschen Problems[3])) gelangt man zu Satz I, der aussagt, daß F notwendig eine (eventuell gemischte) transitive Lie-Gruppe mit endlich vielen Komponenten ist, und daß J kompakt und (bei geeigneter Koordinatenwahl) eine lineare orthogonale und auf der Abstandssphäre transitive Gruppe ist.

Die Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen liefert dann die Methoden zur Klassifikation der zulässigen Standuntergruppen J und zum Einbau dieser in die möglichen F. Das endgültige Ergebnis können wir zusammenfassen in einer (von Tits herrührenden) Liste.

[1]) Die Klassifikation ist unvollständig, aber später korrigiert worden.

[2]) die ich inzwischen aus einem Manuskript kennengelernt habe.

[3]) Yamabe, H.: On the conjecture of Iwasawa and Gleason. Ann. of Math. (2) **58**, 48—54 (1953). — Yamabe, H.: A generalization of a theorem of Gleason. Ann. of Math. (2) **58**, 351—365 (1953).

Ehe wir diese angeben, führen wir einige Bezeichnungen ein.

Mit $*$ geben wir einen der folgenden Körper an:

re: Körper der reellen Zahlen.

ko: Körper der komplexen Zahlen.

qu: (Schief-)Körper der Quaternionen (über re).

ok: (Alternativ-)Körper der Oktaven (über re).

$\mathrm{VR}(n, *)$ ist der n-dimensionale Vektorraum über $*$. (Für $* = \mathrm{ok}$ wird nur $n = 2$ verwendet.)

$\mathrm{AR}(n, *)$ ist der entsprechende affine Raum [d.h. $\mathrm{VR}(n, *)$ nach Aufhebung der Auszeichnung von 0].

$\mathrm{UVR}(n, *)$ und $\mathrm{UAR}(n, *)$ sind dieselben Räume nach Adjunktion einer hermiteschen Form $\sum x_i \bar{x}_i$ in den Koordinaten (unitäre Räume).

$\mathrm{PR}(n, *)$ ist der n-dimensionale projektive Raum, der aus $\mathrm{VR}(n+1, *)$ entsteht als Raum der Klassen (ϱx) $(\varrho \in *,\ x \in \mathrm{VR})$. Im Falle ok muß PR anders definiert werden[4]).

$\mathrm{ElR}(n, *)$ ist der n-dimensionale elliptische Raum und entsteht aus $\mathrm{PR}(n, *)$ durch Adjunktion einer Absoluten $\sum x_i \bar{x}_i = 0$. Im Falle ok muß ElR anders definiert werden[4]).

$\mathrm{SpR}(n, \mathrm{re})$ ist der n-dimensionale sphärische Raum, der als Überlagerung von $\mathrm{ElR}(n, \mathrm{re})$ entsteht, oder als $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 1$ in $\mathrm{VR}(n+1, \mathrm{re})$.

$\mathrm{HyR}(n, *)$ ist das Innere einer Absoluten $\sum_1^n x_i \bar{x}_i = x_{n+1} \bar{x}_{n+1}$ in $\mathrm{PR}(n, *)$. Im Falle ok muß HyR anders definiert werden.

Zu diesen Räumen gehören die Gruppen der (stetigen) Automorphismen, die durch ein vorgesetztes G bezeichnet werden. Insbesondere sind

GUAR die euklidischen
GElR die elliptischen
GSpR die sphärischen
GHyR die hyperbolischen

} Bewegungsgruppen.

Dabei ist $\mathrm{GSpR}(n, \mathrm{re})$ die Gruppe $\mathrm{GUVR}(n+1, \mathrm{re})$ auf $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 1$ betrachtet.

Von den Gruppen GUAR betrachten wir noch gewisse Untergruppen G_0, die definiert sind

für $* = \mathrm{re}, \mathrm{ko}$ durch: Funktionaldeterminante $= 1$,
für $* = \mathrm{qu}$, durch $b = 1$ in der Formel

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j b + c_i$$

für ein Element von $\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{qu})$.

[4]) Siehe FREUDENTHAL, H.: Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Utrecht 1951.

Ferner verstehe man für $\mathrm{ElR}(n, \mathrm{re})$, $\mathrm{ElR}(n, \mathrm{ko})$ (n ungerade), $\mathrm{SpR}(n, \mathrm{re})$ ($n > 1$) unter G_0 die Komponente der Identität von G.

Übrigens sei $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}$.

Hauptsatz I. *Die den Bedingungen S, V, Z genügenden Gruppen F sind: Die zwischen* G *und* G_0 *von*

$$\mathrm{UAR}(n, *), \quad \mathrm{ElR}(n, *), \quad \mathrm{Sp}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{Hy}(n, *)$$

liegenden abgeschlossenen Gruppen.

Ferner (1) *die Untergruppe von* $\mathrm{GUAR}(7, \mathrm{re})$, *deren Standuntergruppe eine Darstellung der* G_2 *(bzw. ergänzt mit einer Spiegelung), nämlich die Automorphismengruppe der Oktaven mit Realteil* 0, *ist;*

(2) *die Untergruppe von* $\mathrm{GUAR}(8, \mathrm{re})$, *deren Standuntergruppe die niedrigste Spindarstellung von* $\mathrm{GUVR}(7, \mathrm{re})$ *ist;*

(3) *die Untergruppe von* $\mathrm{GSpR}(6, \mathrm{re})$, *die entsteht, wenn man obengenannte Darstellung der* G_2 *auf* $\mathrm{SpR}(6, \mathrm{re})$ *betrachtet (eventuell ergänzt mit einer Spiegelung);*

(4) *die Untergruppe von* $\mathrm{GSpR}(7, \mathrm{re})$, *die entsteht, wenn man oben genannte Spindarstellung von* $\mathrm{GUVR}(7, \mathrm{re})$ *auf* $\mathrm{SpR}(7, \mathrm{re})$ *betrachtet;*

(5, 6) *die den beiden letzten Gruppen* (3—4) *entsprechenden Gruppen von* $\mathrm{PR}(6, \mathrm{re})$ *und* $\mathrm{PR}(7, \mathrm{re})$.

Man sieht also, daß schon Kolmogorovs Trennungseigenschaft erster Stufe tief einschneidet, und daß man sie nur für eine einzige Bahn zu fordern braucht. Will man nun die klassischen Räume des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems charakterisieren, so wird man eine Trennungseigenschaft höherer Stufe fordern, und das bedeutet, daß eine Bahn (mit der auf ihr herrschenden Darstellung der Standuntergruppe) wieder ein S, V, Z genügender Raum sein muß, und so fort.

Aus der Liste von Hauptsatz I folgt:

Hauptsatz II. *Fordert man die Gültigkeit von Z auch für eine Bahn, so bleiben übrig die klassischen Gruppen des Raumproblems*

$$\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GElR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GSpR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GHyR}(n, \mathrm{re})$$

und die zugehörigen Gruppen G_0; *ferner* (1), (2), (4), (6), *auf deren Bahnen bzw. die Gruppen* (3), (4), (3), (3) *herrschen. Die zugehörigen Räume sind alle von konstanter Krümmung. Fordert man Z auch noch für die Bahnen zweiter Stufe, so bleibt außer den klassischen Gruppen nur* (2) *übrig. Fordert man schließlich Z noch für die Bahnen dritter Stufe, so bleiben nur die klassischen Gruppen übrig.*

Verfolgt man die Dinge weiter in der Richtung von G. Birkhoff, Busemann und Wang, so erhält man:

Hauptsatz III. *R sei metrisch, zusammenhängend und im Kleinen kompakt. F sei die Gruppe der Isometrien von R. Es gebe eine Zahl* $\gamma > 0$, *aber*

kleiner als die obere Grenze der in R auftretenden Abstände, mit der Eigenschaft: F führt ein Punktepaar mit dem Abstand γ in jedes andere mit dem Abstand γ über. Dann ist F eine der Gruppen

$$\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GElR}(n, *), \quad \mathrm{GSpR}(n, *), \quad \mathrm{GHyR}(n, *).$$

Hauptsatz IV. *Es gebe außerdem eine Zahl $\gamma' > 0$, aber kleiner als der Durchmesser der Abstandssphäre mit dem Radius γ, mit der Eigenschaft, daß F ein Tripel mit den Abständen γ, γ, γ' in jedes andere derartige überführe. Dann ist F eine der Gruppen*

$$\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GElR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GSpR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GHyR}(n, \mathrm{re}).$$

Literatur zur Einleitung

RIEMANN, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, 1854 gehaltener Habilitationsvortrag, 1867 veröffentlicht in Abh. Ges. Wiss. Göttingen **15** = Werke 1876, 254—269.

HELMHOLTZ, H.: Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. (Vortrag vom 22. Mai 1866?) Verh. Naturhist. med. Verein Heidelberg **4**, 197—202 (1868) = Wissensch. Abh. II (1883), 610—617.

HELMHOLTZ, H.: Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1868**, 193—221 = Wissensch. Abh. II (1883), 618—639.

ERDMANN, B.: Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.

LIE, S.: Über die Grundlagen der Geometrie. Berichte Ges. Wiss. Leipzig **42**, 284—321, 355—418 (1890) = Ges. Abh. II, **1**, 380—468.

LIE, S.: Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. V. Leipzig 1893.

CANTOR, G.: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. **5**, 123—132 (1872) = Ges. Abh. 92—102.

DEDEKIND, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.

STOLZ, O.: B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. **18**, 255—279 (1881), speziell 269.

STOLZ, O.: Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Math. Ann. **22**, 504—519 (1883).

VERONESE, G.: I continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede. Atti Accad. Linc., Memorie cl. fis. (4) **6**, 603—624 (1890).

HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, Anhang IV (1902).

WEYL, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923.

BROUWER, L. E. J.: Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. Math. Ann. **67**, 246—267 (1909); **69**, 181—203 (1910).

MOORE, R. L.: On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert problem of the foundations of geometry. Amer. J. Math. (2) **41**, 299—319 (1919).

SÜSS, W.: Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. Tohoku Math. J. **26**, 365—385 (1926); **27**, 214—242 (1926); **28**, 228—241 (1927). — Jap. J. Math. **4**, 97—119 (1927).

CAIRNS, ST. S.: An axiomatic basis for plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 234—244 (1923).

LUBBEN, R. G.: The double elliptic case of the Lie-Riemann-Helmholtz problem of the foundation of geometry. Fundamenta Math. **11**, 34—95 (1928).

KÉRÉKJARTO, B. DE: Sur le groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe. Comment. Helvet. **13**, 68—82 (1950).

MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological group foundations of rigid space geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 21—49 (1940).

Kolmogoroff, A.: Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1930**, 208—210.

Birkhoff, Garret: Metric foundations of Geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. **27**, 402—406 (1941).

Birkhoff, Garret: Metric foundations of Geometry I. Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 465—492 (1944).

Busemann, H.: Metric Methods in Finsler spaces. Ann. of Math. Studies **8** (1942).

Wang, H. C.: Two-point homogeneous spaces. Ann. of Math. (2) **55**, 177—191 (1952).

Wang, H. C.: Two theorems on metric spaces. Pacific J. Math. **1**, 473—480 (1951).

Tits, J.: Etude de certains espaces métriques. Bull. Soc. Math. Belg. **1952**, 44—52 (1953).

Tits, J.: Sur un article précédent: Etudes de certains espaces métriques. Bull. Soc. Math. Belg. **1953**, 124—125 (1953).

Vorbemerkungen

1. „kompakt" wird im Sinne des früheren „bikompakt" gebraucht.

2. Wo von Gruppen die Rede ist, handelt sich es meistens um Transformationsgruppen, d.h. um in gewisser Weise dargestellte Gruppen. Man soll also z.B. die Bezeichnung GUVR(n, re) nicht verwenden wie $O(n)$, das immer mehr benutzt wird, um die n-dimensionale Drehgruppe zu bezeichnen und nicht ihre Darstellung im n-Raum, für die wir gerade den Ausdruck GUVR(n, re) eingeführt haben, um Mißverständnissen vorzubeugen.

3. Der Infinitesimalring einer Lie-Gruppe wird durch den entsprechenden fetten Buchstaben bezeichnet; z.B. Infinitesimalring von F ist $\boldsymbol{F}$, von B_3 ist $\boldsymbol{B}_3$. Auch Teilmengen und Elemente von Infinitesimalringen werden fett bezeichnet.

4. Die einfachen Lie-Gruppen (Lie-Algebren) werden gemäß der Cartanschen Klassifikation bezeichnet. Hinzugefügt ist: $\boldsymbol{A}_0$ für die 1-dimensionale Algebra, $\boldsymbol{O}$ für die 0-dimensionale. Auch für die fundamentalen Darstellungen bedienen wir uns der Cartanschen[5]) Bezeichnungen.

5. *Gemischte* Lie-Gruppe ist die Bezeichnung für eine Gruppe mit einer diskreten Menge von Komponenten und mit einer *reinen* (d.h. zusammenhängenden) Lie-Gruppe als Komponente der Eins.

6. In einer Transformationsgruppe bedeute id die identische Transformation.

1. Topologische Starrheit

1.1. *Räume* werden im folgenden *Hausdorffsch, im Kleinen kompakt* und *zusammenhängend* vorausgesetzt.

Im Raum R sei eine *transitive Gruppe* F von *Homöomorphismen* (von R auf sich) gegeben. Der Gruppe F erlegen wir noch die Bedingung auf:

S (topologische Starrheit): Zu je zwei fremden abgeschlossenen Mengen A und B von R, von denen mindestens eine kompakt ist, gibt es eine nichtleere offene Menge U, so daß für jedes $f \in F$ die Beziehungen $fU \cap A \neq O$, $fU \cap B \neq O$ einander ausschließen.

[5]) Oeuvres I, 1, 355—398.

1.2. Auf Grund von (S) versieht man R mit einer invarianten gleichmäßigen Struktur:

Ist U offen in R, so sei $\tilde{U}$ die Menge der $(x, y) \in R \times R$ mit der Eigenschaft: es gibt ein $f \in F$ mit $x, y \in fU$. Diese $\tilde{U}$ spielen die Rolle eines Umgebungssystems der Diagonale von $R \times R$.

Unter $\tilde{U}_1 \tilde{U}_2$ versteht man bekanntlich die Menge der (x, z) mit der Eigenschaft: es gibt ein y mit $(x, y) \in \tilde{U}_1$, $(y, z) \in \tilde{U}_2$. Wir zeigen:

Zu jedem V (offen $\neq O$) gibt es ein U (offen $\neq O$) mit $\tilde{U}^2 \subset \tilde{V}$.

Beweis. Zu V gibt es ein nichtleeres offenes kompaktes V_1 mit $\overline{V_1} \subset V$. Auf $\overline{V_1}$ und R/V wenden wir (S) an: es gibt ein U_1, so daß aus $f \in F$, $fU_1 \cap \overline{V_1} \neq O$ folgt: $fU_1 \subset V$. Wegen der Transitivität von F dürfen wir annehmen: $U_1 \cap V_1 \neq O$. Wir setzen $U_1 \cap V_1 = U$. Dann gilt auch:

$$\text{aus} \quad fU \cap U \neq O \quad \text{folgt} \quad fU \subset V.$$

Sei nun (x, y), $(y, z) \in \tilde{U}$, also mit geeigneten $f_i \in F$:

$$x, y \in f_1 U, \quad y, z \in f_2 U,$$

also
$$f_1 U \cap f_2 U \neq O,$$
$$f_2^{-1} f_1 U \cap U \neq O,$$
$$f_2^{-1} f_1 U \subset V,$$
$$f_1 U \subset f_2 V,$$

aber auch
$$f_2 U \subset f_2 V.$$

Also
$$x, z \in f_2 V,$$
$$(x, z) \in \tilde{V}.$$

Also
$$\tilde{U}^2 \subset \tilde{V}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

1.3. Es gibt ein nichtleeres offenes $U \subset R$ mit der Eigenschaft: ist $A \subset R$ kompakt, so ist auch

$$\cup (fU \mid f \in F,\ fU \cap A \neq O) \quad \text{kompakt.}$$

Beweis. Wir wählen V und U, so daß V kompakt und $\tilde{U}^2 \subset \tilde{V}$ ist. Wir überdecken $\bar{A}$ mit endlich vielen $f_i U$ $(f_i \in F)$. Zu jedem $f \in F$ mit $fU \cap A \neq O$ gibt es ein i mit $fU \cap f_i U \neq O$. Also $f_i^{-1} fU \cap U \neq O$, $f_i^{-1} fU \subset V$, $fU \subset f_i V$. Die Vereinigung dieser fU ist also in der der $f_i V$, also kompakt.

1.4. U sei gemäß 1.3 gewählt. Sei W_n die $\tilde{U}^n$-Umgebung irgendeines $x_0 \in R$. Dann ergibt sich induktiv: W_n ist kompakt. W_n ist nämlich die Menge der z mit $y \in W_{n-1}$, $(y, z) \in \tilde{U}$, also die Vereinigung der fU mit $fU \cap W_{n-1} \neq O$. Nach 1.3 folgt aus der Kompaktheit von W_{n-1} die von W_n.

1.5. Weiter gilt: $\cup W_n = R$.

Beweis. R ist zusammenhängend, $\cup W_n$ ist offen. Wir zeigen, daß es auch abgeschlossen ist: wäre $x \in \overline{\cup W_n} \setminus \cup W_n$, so gälte für jedes f mit $x \in fU : fU \cap \cup W_n \neq O$. Dann gäbe es ein i mit $fU \cap W_i \neq O$, also $fU < W_{i+1}$, $x \in W_{i+1}$ im Widerspruch zur Annahme.

1.6. Wir definieren eine Topologie in F:

Für $U \neq O$ offen, A kompakt in R und $f_i \in F$ setzen wir

$$(f_1, f_2) \in \{U, A\}$$

dann und nur dann, wenn

$$\big(f(x), g(x)\big) \in \tilde{U} \text{ für alle } x \in A.$$

Die $\{U, A\}$ gelten als Umgebungssystem der Diagonale von $F \times F$. Unter $\{U, A\}$-Umgebung von f_1 verstehen wir die Menge der f_2 mit $(f_1, f_2) \in \{U, A\}$.

Das ist eine Hausdorffsche Topologie[6]).

1.7. F wird mit dieser Topologie eine topologische Gruppe:

Zu gegebenen $f_i \in F$ mit

$$f_1 f_2 = f_3$$

und gegebenem $\{V, A\}$ bestimmen wir $\{U, A_1\}$ und $\{U, A_2\}$, so daß aus $(f_i, g_i) \in \{U, A_i\}$ $(i = 1, 2)$ folgt $(f_3, g_3) \in \{V, A\}$. Wir wählen nämlich U, so daß

$$\tilde{U}^2 < \tilde{V}$$

und

$$A_1 = f_2 A, \quad A_2 = A.$$

Dann wird

$$(f_1 x,\ g_1 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in f_2 A,$$

$$(f_1 f_2 x,\ g_1 f_2 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Weiter

$$(f_2 x,\ g_2 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in A,$$

$$(g_1 f_2 x,\ g_1 g_2 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in A.$$

Also

$$(f_1 f_2 x,\ g_1 g_2 x) \in \tilde{U}^2 < V \quad \text{für} \quad x \in A, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ferner ergibt sich mit

$$(f, g) \in \{V, f^{-1} A\}:$$

$$(f x, g x) \in \tilde{V} \quad \text{für} \quad x \in f^{-1} A,$$

$$(x, g f^{-1} x) \in \tilde{V} \quad \text{für} \quad x \in A,$$

$$(g^{-1} x, f^{-1} x) \in \tilde{V} \quad \text{für} \quad x \in A,$$

und damit ist auch die Stetigkeit von $f \to f^{-1}$ erwiesen.

[6]) Siehe Bourbaki, l. III, chap. X, § 1, no. 5, prop. 2.

1.8. Sei $x_0 \in R$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0, so daß die $\{U, x_0\}$-Umgebung der Identität von F kompakt ist im Raum der stetigen Abbildungen von R in R (im Sinne der kompakten Konvergenz)[7]).

Das folgt aus dem Satz von Ascoli[8]). Um ihn anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, daß für jedes $x \in R$ die Menge der fx mit $(f, \mathrm{id}) \in \{U, x_0\}$ kompakt ist; U wählen wir dabei gemäß 1.3—5. Die Bedingung für f lautet dann auch

$$(fx_0, x_0) \in \tilde{U}.$$

Nach 1.5 gibt es ein i mit

$$(x_0, x) \in \tilde{U}^i.$$

$$(fx_0, fx) \in \tilde{U}^i,$$

$$(x_0, fx) \in \tilde{U}^{i+1},$$

und das ist nach 1.4 kompakt.

1.9. Wir setzen im folgenden noch voraus:

V: F ist vollständig.

Dann folgt aus 1.8: F ist im Kleinen kompakt.

1.10. Im Beweise von 1.8 können wir statt U irgendeine der Mengen W_n wählen (s. 1.4). Dann ergibt sich, daß die Menge der f mit

$$(f, \mathrm{id}) \in \{W_n, x_0\}$$

kompakt ist. Nach 1.5 ist F die Vereinigung der abzählbar vielen (kompakten) $\{W_n, x_0\}$-Umgebungen der Identität. Hieraus folgt:

Ist $Q \neq O$ offen in F, so ist F Vereinigung abzählbar vieler fQ $(f \in F)$.

1.11. Die kanonische Abbildung $\varphi: f \to fx_0$ von F auf R ist offen.

Dieser Satz wird im wesentlichen genau so bewiesen wie entsprechende Sätze, bei denen das zweite Abzählbarkeitsaxiom vorausgesetzt wird[9]). 1.10 kann nämlich dieses Axiom vertreten. Wir skizzieren den Beweis:

Sei $Q \neq O$ kompakt und offen in F. Man kann F mit abzählbar vielen fQ überdecken. Sei Qx_0 nirgends dicht. Dann ist auch fQx_0 nirgends dicht. R wird dann mit abzählbar vielen nirgends dichten $f_n Q x_0$ überdeckt. Sei $U_1 \neq O$ offen und kompakt in R. Wir definieren induktiv ein nichtleeres offenes $U_{n+1} < U_n$, so daß $\overline{U}_{n+1} \cap f_n Q x_0 = O$ ist; wegen der Nirgendsdichtheit ist das möglich. Wegen der Kompaktheit von U_1 ist $\cap \overline{U}_n$ nichtleer und weiter fremd zu allen $f_n Q x_0$, also zu R, und das ist ein Widerspruch.

Also ist Qx_0 irgendwo dicht. $\overline{Q}\, x_0 = \overline{Q\, x_0}$ enthält also einen inneren Punkt. Ist $Q_1 \neq O$ offen und $\overline{Q}_1 < Q$, so gilt analog: $\overline{Q}_1 x_0$ enthält einen inneren Punkt. Also auch: Qx_0 enthält einen inneren Punkt, also eine offene Menge V. Sei P die Menge der $f \in F$ mit $fx_0 \in V$. Dann ist P offen in F, also auch $P \cap Q = Q'$ offen in F und $Q' x_0 = V$ offen.

[7]) BOURBAKI, l. III, chap. X, § 1, no. 3.

[8]) BOURBAKI, l. III, chap. X, § 4, no. 1.

[9]) FREUDENTHAL, H.: Ann. of Math. **37**, Nr. 4—5, 46—56 (1936).

Also gibt es zu jedem offenen Q in F ein nichtleeres offenes $Q' \subset Q$, so daß $Q' x_0$ auch offen ist.

Sei P nun beliebig offen in F. Wir müssen zeigen: $P x_0$ offen in R. Wir dürfen annehmen: $\mathrm{id} \in P$. Es genügt auch, zu zeigen, daß x_0 innerer Punkt von $P x_0$ ist. Wir wählen das offene Q so, daß $Q^{-1} Q \subset P$ ist. Sei $f \in Q'$ (siehe vorigen Absatz). $f x_0$ ist dann innerer Punkt von $Q' x_0$, also x_0 innerer Punkt von $f^{-1} Q' x_0 \subset P x_0$, w. z. b. w.

2. Bahnzerlegung

2.1. Zu einem Punkt $x_0 \in R$ gehört die *Standuntergruppe* J von F, die besteht aus den $f \in F$ mit $f x_0 = x_0$. Nach 1.11 darf R mit dem Nebengruppenraum F/J kanonisch identifiziert werden. Jede Menge Jx (mit festem x) heißt eine *J-Bahn* oder kurz eine *Bahn*.

Ist U eine Umgebung von x_0 gemäß 1.3, so ist

$$\cup (fU \mid f \in J)$$

eine bei J invariante Umgebung von x_0. Sie ist in der $\tilde{U}^2$-Umgebung von x_0 enthalten, also nach 1.4 kompakt.

Ebenso ist nach 1.4—5 jede Bahn kompakt.

2.2. Wir stellen nun noch die Forderung:

Z: Es gibt eine Bahn, die R zerlegt.

Wir beweisen in 2.3—7:

Satz I. *Unter den Voraussetzungen (S, V, Z) ist F eine (eventuell gemischte) transitive Lie-Gruppe mit endlich vielen Komponenten. J ist kompakt und bei geeigneter Koordinatenwahl eine lineare orthogonale Gruppe, die sich auf der Abstandssphäre transitiv benimmt.*

2.3. Sei F' eine offene abgeschlossene Untergruppe von F. Sei $J' = J \cap F'$. Die kanonische Beziehung zwischen den Nebengruppenräumen F/J und F'/J' ist dann eine Homöomorphie.

Beweis. Jede Nebengruppe von F' in F enthält Elemente von J, da sonst $R = F/J$ nicht zusammenhinge. Wir bilden F/J auf F'/J' ab:

$$fJ \to fJ \cap F'.$$

$fJ \cap F' = f(J \cap f^{-1} F')$ ist nicht leer. Ist $f_1 \in fJ \cap F'$ und $f_2 \in J'$, so ist $f_1 f_2 \in fJ \cap F'$. Ist $f_i \in fJ \cap F'$, so ist $f_1^{-1} f_2 \in J'$. Also ist $fJ \cap F'$ eine Nebengruppe von J' in F'. Die Beziehung ist eineindeutig, denn aus $f_1 J \cap F' = f_2 J \cap F'$ folgt $f_1^{-1} f_2 \in J \cap F'$. Sie bezieht F/J *auf* F'/J', denn für ein gegebenes fJ' mit $f \in F'$ gilt: $fJ \to fJ \cap F' = f(J \cap F') = fJ'$. Der topologische Charakter ist klar.

2.4. Der Bahnbegriff ändert sich, wenn man (unter den Voraussetzungen von 2.3) von F/J nach F'/J' übergeht. Wir zeigen: Eine J-Bahn in F/J zerfällt in *endlich* viel J'-Bahnen in F'/J'.

J ist nämlich kompakt, also ist auch J/J' kompakt, aber außerdem, da J' offen in J ist, diskret. Also ist J/J' endlich. Die J-Bahn zerfällt in höchstens soviel J'-Bahnen wie J in Nebenklassen nach J'.

2.5. F_0 sei die Einskomponente von F. Dann ist F_0 Normalteiler von F.

F_0 ist zusammenhängend und im Kleinen kompakt, besitzt also beliebig kleine kompakte Untergruppen F_1, so daß F_0/F_1 Liesch ist[10]).

Wir zeigen, daß der Normalisator F' von F_1 in F offen (und abgeschlossen) in F ist:

Mit F_1 ist auch fF_1f^{-1} Normalteiler in F_0, also auch $F_1 \cdot fF_1f^{-1}$. Nun ist $F_1 \cdot fF_1f^{-1}/F_1$ Normalteiler der Lie-Gruppe F_0/F_1 und andererseits in einer vorgeschriebenen Umgebung der Eins enthalten, wenn f genügend nahe der Eins gewählt wird. Das ist aber nur möglich, wenn $F_1 \cdot fF_1f^{-1} = F_1$ ist. Das bedeutet wiederum $fF_1f^{-1} = F_1$ für *alle* f in der Nähe der Eins. Der Normalisator von F_1 ist also offen.

2.6. Die Forderung (Z) kann auch geschrieben werden:

$$JfJ \text{ zerlegt } F \text{ für gewisses } f \in F.$$

Wir wählen nun F_1 nach 2.5 so klein, daß auch noch gilt:

$$JfF_1J \text{ zerlegt } F.$$

Wir definieren F' als Normalisator von F_1 in F und können nach 2.5 (Ende) nun 2.3 (auf F_1 statt F') anwenden. Von f darf man nach 2.3 voraussetzen: $f \in F'$. Wir unterwerfen JfF_1J/J der kanonischen Homöomorphie aus 2.3. Dann ergibt sich:

$$JfF_1J' = JfF_1J \cap F' \text{ zerlegt } F'.$$

Nach 2.4 gibt es endlich viele $f_i \in F'$, so daß

$$JfF_1J' = \bigcup_i J'f_iF_1J'.$$

Da F_1 Normalteiler in F' ist, darf man das auch schreiben:

$$(*) \qquad \bigcup_i F_1J'f_iF_1J' \text{ zerlegt } F'.$$

Mit der kanonischen Abbildung

$$\varphi: \quad F' \to F'/F_1 = F'',$$
$$R = F'/J' \to F'/F_1J' = R'',$$
$$f_i \to f_i'',$$
$$F_1J' \to F_1J'/F_1 = J''$$

erhält man eine gemischte Lie-Gruppe F'', die transitiv wirkt in R'' und da eine Standuntergruppe J'' besitzt. $(*)$ besagt:

Z': R'' wird durch eine gewisse endliche Vereinigung von Bahnen zerlegt.

[10]) YAMABE, H.: Ann. of Math. (2) **58**, 351—365 (1953).

Da R'' eine (n-dimensionale) analytische Mannigfaltigkeit ist und jede Bahn in R'' als Vereinigung analytischer Mannigfaltigkeiten liegt, ist mindestens eine Bahn (nach Z') $(n-1)$-dimensional.

J'' ist kompakt und besitzt daher nur endlich viel Komponenten; die Einskomponente heiße J_0''. Da wegen des Zusammenhanges von R'' jede Komponente von F'' Punkte von J'' enthält, besitzt F'' höchstens soviel Komponenten wie J'', also nur endlich viele. Die Einskomponente von F'' heiße F_0''.

2.7. Die $j \in J''$ induzieren im Infinitesimalring $\boldsymbol{F}_0''$ lineare Abbildungen

$$\psi_j : \boldsymbol{f} \to j \boldsymbol{f} j^{-1},$$

die J'' darstellen. Wegen der Kompaktheit von J'' sind sie nach geeigneter Abstandsdefinition orthogonal. Die ψ_j lassen $\boldsymbol{J}_0''$ und sein orthogonales Komplement $\boldsymbol{K}$ invariant. Man darf in der Nähe von x_0 nun R'' mit $\exp \boldsymbol{K}$ identifizieren: man ordne dem Punkte fJ'' von R den (dort eindeutig bestimmten) Schnittpunkt von $\exp \boldsymbol{K}$ mit der Nebenklasse fJ'' zu.

Die Punkte von R'' stellen sich dann im Kleinen in der Form

$$\exp \boldsymbol{k} \cdot J'' \qquad (\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K})$$

dar. Anwendung eines $j \in J''$ ergibt

$$\exp \boldsymbol{k} \cdot J'' \to j \exp \boldsymbol{k} \cdot J'' = j \exp \boldsymbol{k} j^{-1} J'' = \exp j \boldsymbol{k} j^{-1} \cdot J''.$$

j transformiert R dann gemäß ψ_j.

J'' benimmt sich also in der Nähe von x_0 wie eine orthogonale Gruppe. Da eine Bahn von J'' $(n-1)$-dimensional ist, sind alle seine Bahnen im allgemeinen mindestens $(n-1)$-dimensional. Hieraus folgt, daß J'' auf der Abstandssphäre transitiv ist.

2.8. Wir kehren zu F zurück. Wir hatten $F_0'' = F_0 / F_1$. Ist F_0 nicht Lie-Gruppe, so gibt es eine echt absteigende Folge F_n von Normalteilern von F_0 so, daß die F_0/F_n Lie-Gruppen sind, die die in Satz I ausgedrückten Eigenschaften besitzen. Es gibt dann eine echte unendliche Folge stetiger kanonischer Homomorphismen

$$F_0/F_1 \leftarrow F_0/F_2 \leftarrow \cdots.$$

Nach der Klassifikation der dem Satz I entspringenden Lie-Gruppen zeigt sich aber (s. 8), daß solche Folgen höchstens die Länge 5 haben können. F_0 muß daher eine Lie-Gruppe sein und F eine gemischte Lie-Gruppe, die dem Satz I genügt.

3. Die zulässigen reinen Standuntergruppen

3.1. Wir behalten die Bezeichnungen bei, lassen aber die doppelten Akzente weg.

Mit J besitzt auch J_0 die Eigenschaften: in sich kompakt, linear, orthogonal, transitiv auf der Sphäre.

Wir behandeln vorläufig nur J_0, lassen aber den Index weg, setzen also Zusammenhang voraus.

J wirkt in einem linearen Raum $\boldsymbol{K}$.

3.2. J ist sicher (reell) irreduzibel, also ist $\boldsymbol{J}$ halbeinfach oder direkte Summe eines halbeinfachen und eines eindimensionalen Lie-Ringes. Die zweite Möglichkeit besteht nur, wenn $\boldsymbol{J}$ komplex reduzibel ist.

Da J orthogonal ist, sind alle seine Wurzelformen und Gewichte rein imaginär (bezogen auf eine reelle maximal Abelsche reguläre Untergruppe H). Mit jeder Wurzelform kommt also auch die entgegengesetzte vor und mit jedem Gewicht das entgegengesetzte. Wenn x ein Vektor von $\boldsymbol{K}$ vom Gewicht g ist, so ist $\bar{x}$ einer vom Gewicht $-g$. Das zur Wurzel α gehörige Element von $\boldsymbol{J}$ wird wie üblich mit $\boldsymbol{e}_\alpha$ bezeichnet.

3.3. Seien x und y Vektoren von $\boldsymbol{K}$ vom Gewicht $g \neq 0$ und $g' \neq 0$. Wegen der Transitivität von J auf der Sphäre muß es ein $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}$ geben mit

$$\boldsymbol{j}(x + \bar{x}) \equiv y + \bar{y} \mod x + \bar{x}.$$

Sei

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{h} + \Sigma(\tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \bar{\tau}_\alpha \bar{\boldsymbol{e}}_\alpha) \quad \text{mit } \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}.$$

Also

$$\left(\boldsymbol{h} + \Sigma(\tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \tau_\alpha \bar{\boldsymbol{e}}_\alpha)\right)(x + \bar{x}) \equiv y + \bar{y} \mod x + \bar{x}.$$

Links steht eine Kombination von Vektoren der Gewichte $\pm g$, $\pm(g \pm \alpha)$ (α = variable Wurzelform), rechts eine von Vektoren der Gewichte $\pm g'$. Also:

3.3.1. Für je zwei Gewichte $g \neq 0$, $g' \neq 0$ mit $g \neq \pm g'$ gilt:

$$g + g' \quad \text{oder} \quad g - g' \quad \text{ist Wurzelform.}$$

Sei nun $g = g' \neq 0$ (aber $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ unabhängig). Dann ergibt sich analog:

3.3.2. Ist das Gewicht $g \neq 0$ von einer Vielfachheit > 1, so ist diese Vielfachheit $= 2$ und $2g$ Wurzelform.

Schließlich hat man:

3.3.3. Das Gewicht 0 kann höchstens die Vielfachheit 1 besitzen, in dem Falle ist jedes Gewicht Wurzelform.

3.4. Ist $\boldsymbol{J}$ nicht-trivial direkte Summe zweier Lie-Ringe $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$, so ist 0 nicht Gewicht und einer von beiden hat (in der durch $\boldsymbol{J}$ induzierten Darstellung) höchstens zwei verschiedene Gewichte.

Beweis. Der maximal abelsche reguläre Teilring von $\boldsymbol{L}_i$ heiße $\boldsymbol{H}_i$. Jede Wurzelform verschwindet entweder auf $\boldsymbol{H}_1$ oder auf $\boldsymbol{H}_2$. Ist 0 Wurzelform, so verschwindet nach 3.3.3 jedes Gewicht auf $\boldsymbol{H}_1$ oder auf $\boldsymbol{H}_2$. Wäre g_i ($i = 1, 2$) ein Gewicht, das auf $\boldsymbol{H}_i$ nicht verschwände, so käme man mit dem Gewicht $g_1 \pm g_2$ (s. 3.3.1) zu einem Widerspruch. Also verschwinden alle Gewichte etwa auf $\boldsymbol{H}_2$. Also $\boldsymbol{L}_2 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Jedes Gewicht g von $\boldsymbol{J}$ ist zu schreiben als Summe von Linearformen

$$g = g_1 + g_2,$$

wo g_1 auf $\boldsymbol{H}_2$ verschwindet und g_2 auf $\boldsymbol{H}_1$. Mit einem weiteren Gewicht

$$g' = g_1' + g_2' \quad \text{mit} \quad g_1' \neq \pm g_1$$

erhalten wir nach 3.3.1 eine Wurzelform $g \pm g'$, die auf $\boldsymbol{H}_1$ oder auf $\boldsymbol{H}_2$ verschwinden muß. Alle g' haben also die Form

$$\pm g_1 + g_2' \quad \text{oder} \quad g_1' \pm g_2.$$

Diese beiden widersprechen einander nach dem soeben Bewiesenen, wenn nicht $g_1 = \pm g_1'$ oder $g_2 = \pm g_2'$. Hieraus folgt die Behauptung.

3.5. Wir nehmen im folgenden an, daß $\boldsymbol{L}_2$ nur zwei verschiedene Gewichte besitzt. $\boldsymbol{L}_2$ ist dann vom Rang 0 oder vom Rang 1. Im zweiten Fall ist $\boldsymbol{K}$ komplexe Summe von Ebenen, in denen $\boldsymbol{L}_2$ wie $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ operiert[11]).

Jedenfalls erzeugen die Vektoren von Gewichten $g_1 + g_2$ bzw. $g_1 - g_2$ einen Unterraum $\boldsymbol{K}_+$ bzw. $\boldsymbol{K}_-$ von $\boldsymbol{K}$. Ist $x \in \boldsymbol{K}_+$ ein Vektor vom Gewicht g, so ist $\bar{x}$ vom Gewicht $-g$, also in $\boldsymbol{K}_-$. Daher sind $\boldsymbol{K}_+$ und $\boldsymbol{K}_-$ konjugiert komplex. Ihre (direkte) Summe ist $\boldsymbol{K}$.

$\boldsymbol{K}_+$ und $\boldsymbol{K}_-$ sind invariant gegenüber $\boldsymbol{L}_1$, da die Basis-Operationen von $\boldsymbol{L}_1$ einen Vektor vom Gewicht $g_1 + g_2$ in einen von einem Gewicht $g_1 + g_2$ oder $g_1 + \alpha + g_2$ (α Wurzelform von $\boldsymbol{L}_1$) überführen.

Ist $\boldsymbol{L}_2$ vom Range 1, so vertauscht die Spiegelung an der Wurzelebene $g_2 = 0$ ($2g_2$ ist Wurzel von $\boldsymbol{L}_2$) die $g_1 \pm g_2$ untereinander. $\boldsymbol{K}_+$ und $\boldsymbol{K}_-$ werden durch $\boldsymbol{L}_1$ dann äquivalent transformiert.

In keinem Fall kann $\boldsymbol{L}_1$ (in $\boldsymbol{K}_+$) einer reellen Darstellung äquivalent sein. Sonst wäre nämlich die Abbildung $x \to \bar{x}$ ($x \in \boldsymbol{K}$) vertauschbar mit den Elementen von $\boldsymbol{L}_1$; die Teilräume $\boldsymbol{K}'$ bzw. $\boldsymbol{K}''$ der $x + \bar{x}$ bzw. $i(x - \bar{x})$ mit $x \in \boldsymbol{K}_+$ wären ebenfalls invariant bei $\boldsymbol{L}_1$ und obendrein reell; die Darstellungen von $\boldsymbol{L}_1$ in $\boldsymbol{K}'$ und $\boldsymbol{K}''$ wären reell äquivalent; $\boldsymbol{L}_2$, das mit $\boldsymbol{L}_1$ vertauschbar und orthogonal ist, wäre vom Range 0; die Elemente von $\boldsymbol{L}$ hätten die Form

$$\begin{pmatrix} M & \varrho \cdot 1 \\ -\varrho \cdot 1 & M \end{pmatrix},$$

und $\boldsymbol{J}$ könnte nicht transitiv auf der Sphäre sein.

3.6. Für die Gewichte von $\boldsymbol{L}_1$ (d.h. die Gewichte von $\boldsymbol{J}$, auf $\boldsymbol{H}_1$ betrachtet) gelten wieder die Behauptungen 3.3.1–3, jedoch mit einigen Modifikationen:

3.6.1. Für je zwei Gewichte $g_1 \neq 0$, $g_1' \neq 0$ mit $g_1 \neq \pm g_1'$ gilt:

$$g_1 + g_1' \quad \text{oder} \quad g_1 - g_1' \quad \text{ist Wurzelform.}$$

3.6.2. Alle Gewichte $g_1 \neq 0$ sind einfach.

3.6.3. Das Gewicht 0 kann höchstens die Vielfachheit 2 besitzen.

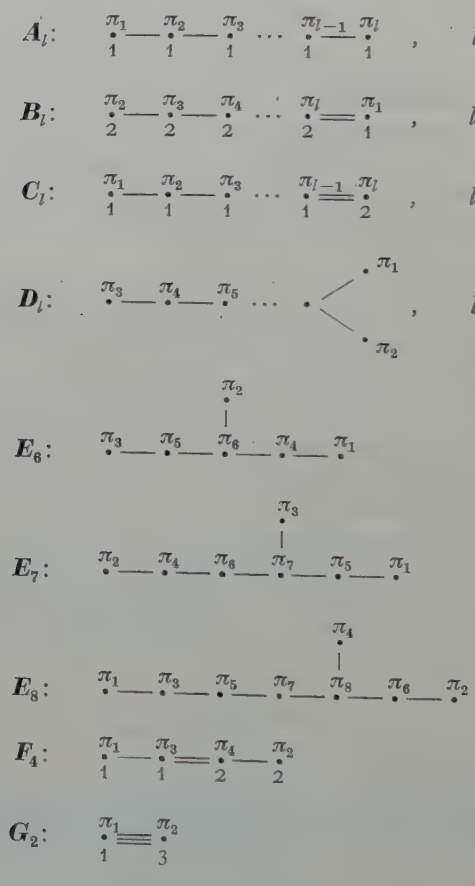
---

[11]) Siehe Vorbemerkungen 4.

Hier ist 3.6.1 klar. — Ist g_1 mehrfach, so gibt es ein mehrfaches Gewicht g_1+g_2 von $\boldsymbol{J}$; nach 3.3.2 ist dann $2g_1+2g_2$ Wurzelform, also $g_1=0$ und g_2 von der Vielfachheit 2. Hieraus folgen 3.6.2—3.

3.7. Wir belegen $\boldsymbol{J}$, wenn es einfach ist, und $\boldsymbol{L}_1$ (im Raum $\boldsymbol{K}_1$), wenn $\boldsymbol{J}$ direkte Summe ist, mit dem gemeinsamen Namen $\boldsymbol{L}$. Wir untersuchen vorläufig $\boldsymbol{L}$. Es ist klar, daß $\boldsymbol{L}$ einfach ist — eventuell auch $=\boldsymbol{O}$ oder eindimensional, aber diese Fälle lassen wir vorläufig weg.

3.8. Bei den einfachen Gruppen bedienen wir uns der folgenden Schemata:


A_l: π_1 π_2 π_3 ... π_{l-1} π_l , $l \geqq 1$.
B_l: π_2 π_3 π_4 ... π_l π_1 , $l \geqq 2$.
C_l: π_1 π_2 π_3 ... π_{l-1} π_l , $l \geqq 3$.
D_l: π_3 π_4 π_5 ... π_1 π_2 , $l \geqq 4$.
E_6: π_2 π_3 π_5 π_6 π_4 π_1
E_7: π_3 π_2 π_4 π_6 π_7 π_5 π_1
E_8: π_4 π_1 π_3 π_5 π_7 π_8 π_6 π_2
F_4: π_1 π_3 π_4 π_2
G_2: π_1 π_2

Die irreduziblen Wurzelformen ϱ_i sind als dicke Punkte angedeutet. Bei einem ϱ_i ist das zugehörige fundamentale dominante Gewicht π_i angegeben, d.h.

$$2\frac{(\pi_j, \varrho_i)}{(\varrho_i, \varrho_i)} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i. \end{cases}$$

Wir notieren noch die dominanten Wurzelformen $\neq 0$:

$\boldsymbol{A}_l$: $\pi_1 + \pi_l$ (für $l = 1 : \pi_1$).
$\boldsymbol{B}_l$: π_2, π_3 (für $l = 2 : \pi_2, 2\pi_1$).
$\boldsymbol{C}_l$: $2\pi_1, \pi_2$.
$\boldsymbol{D}_l$: π_4.
$\boldsymbol{E}_6$: π_2.
$\boldsymbol{E}_7$: π_3.
$\boldsymbol{E}_8$: π_1.
$\boldsymbol{F}_4$: π_1, π_2.
$\boldsymbol{G}_2$: π_1, π_2.

3.9. Sei g ein dominantes Gewicht von $\boldsymbol{L}$ mit der Eigenschaft:

$$2\frac{(g,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \geqq 2$$

für eine gewisse irreduzible Wurzelform ϱ. Dann ist $g - 2\varrho$ Gewicht, also ist $2g - 2\varrho = \alpha$ nach 3.3.1 und 3.6.1 Wurzelform (denn 2ϱ ist sicher keine). $\alpha = 0$ bedeutet, daß das dominante Gewicht g auch irreduzible Wurzelform ist, also Rang $= 1$. Im Falle $\alpha \neq 0$ zeigt sich, daß α dominante Wurzelform ist. Denn $2\frac{(\alpha,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \geqq 0$ und für jeden Nachbarn ϱ' von ϱ:

$$2\frac{(\alpha,\varrho')}{(\varrho',\varrho')} > 0.$$

Weiter ist

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \text{ gerade}$$

für jede Wurzelform β. Das ist nur möglich beim Rang $= 1$ oder bei $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{B}_2)$ und $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{C}_l)$ (s. 3.8). ϱ darf nur einen Nachbarn haben [außer für $\pi_2(\boldsymbol{A}_3)$, aber das ist schon weggefallen]. Im Falle $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{C}_l) = 2\omega_1$, wird $\varrho = \omega_1 - \omega_2$, $g = 2\omega_1 - \omega_2$, was nicht dominant ist. Im Falle $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{B}_2) = \omega_1 + \omega_2$, $\varrho = \omega_1 - \omega_2$ oder $= \omega_2$, $g = \frac{3}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2$ oder $\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_2$, die nicht dominant sind.

Nur der Rang 1 bleibt übrig. Mit 3.3.1 und 3.6.1 verträglich sind $g = p\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ $p = 1, 2, 3$. Die irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht $3\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ ist 4-dimensional und wesentlich nicht reell[12]). $\boldsymbol{J}$ ist dann höchstens $(3+3)$-dimensional und kann auf der Sphäre im $2 \cdot 4$-dimensionalen Raum nicht transitiv sein. $3\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ fällt also auch weg.

Nun bleiben $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$, $2\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ übrig.

3.10. Wir dürfen jetzt voraussetzen:

$$2\frac{(g,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \leqq 1$$

für jedes dominante Gewicht g und jede irreduzible Wurzelform ϱ.

[12]) Die Realitätsfragen bei Darstellungen werden wir an anderer Stelle allgemein behandeln. — Alle $p\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ mit ungeradem p sind nichtreell.

Sei

$$(*) \qquad 2\frac{(g,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} = 1 \quad \text{und} \quad 2\frac{(g,\varrho')}{(\varrho',\varrho')} = 1$$

für zwei irreduzible Wurzelformen ϱ, ϱ'. Dann sind $g-\varrho$ und $g-\varrho'$ Gewichte. $\varrho-\varrho'$ ist nicht Wurzelform, also (nach 3.3.1 und 3.6.1) $\alpha = 2g-\varrho-\varrho'$ wohl. $\alpha = 0$ bedeutet $g = \frac{1}{2}(\varrho+\varrho')$; das kann aber nur beim Rang 2 dominant sein; man sieht leicht, daß das unmöglich ist.

α ist wieder dominant und

$$2\frac{(\alpha,\varrho'')}{(\varrho'',\varrho'')} > 0$$

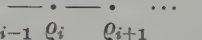
für alle Nachbarn ϱ'' von ϱ oder ϱ'. Nur $\pi_3(\boldsymbol{B}_3)$, $\pi_2(\boldsymbol{C}_3)$ lassen das zu, erweisen sich aber auch als unmöglich. Daher ist (*) unzulässig und g notwendig fundamental.

Im folgenden ist ϱ_i die irreduzible Wurzelform, für die

$$2\frac{(g,\varrho_i)}{(\varrho_i,\varrho_i)} = 1$$

gilt. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

3.11.



Hier sind $g-\varrho_i$ und $g-\varrho_{i-1}-\varrho_i-\varrho_{i+1}$ Gewichte. $\varrho_{i-1}+\varrho_{i+1}$ ist nicht Wurzelform. Daher ist (3.3.1 und 3.6.1) $\alpha = 2g-\varrho_{i-1}-2\varrho_i-\varrho_{i+1}$ wohl Wurzelform, und zwar wieder 0 oder dominant.

$$2\frac{(\alpha,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} > 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-2}, \varrho_{i+2},$$
$$= 0 \quad \text{sonst.}$$

Mit 3.8 ist das nur verträglich, wenn entweder g an einem der Schemaenden steht oder an einem Kreuzpunkt oder eines der Gewichte

$$\pi_2(\boldsymbol{A}_3),\ \pi_3(\boldsymbol{A}_5),\ \pi_l(\boldsymbol{B}_l),\ \pi_{l-1}(\boldsymbol{C}_l),\ \pi_3(\boldsymbol{F}_4),\ \pi_4(\boldsymbol{F}_4)$$

ist. Nun ist die Darstellung zu $\pi_3(\boldsymbol{A}_5)$ wesentlich komplex[13]; die reelle Darstellung geschieht in $2\cdot 20$ Dimensionen; die Gruppe hat höchstens $35+3$ Dimensionen; es herrscht also keine Transitivität auf der Sphäre.

3.12.

Wieder ist $\alpha = 2g-\varrho_{i-1}-2\varrho_i-\varrho_{i+1} = 0$ oder dominante Wurzelform. Hier wird

$$2\frac{(\alpha,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} > 0 \quad \text{auch noch für} \quad \varrho = \varrho_{i+1}.$$

Hiermit fallen die $\pi_l(\boldsymbol{B}_l)$ fort, außer $\pi_2(\boldsymbol{B}_2)$. Weiter fällt $\pi_4(\boldsymbol{F}_4)$ fort.

[13]) Siehe Fußnote 12. — Die Darstellungen $\pi_k(\boldsymbol{A}_{2k-1})$ sind nur für gerades k reell.

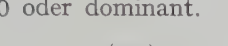
3.13.

$\alpha = 2g - \varrho_{i-1} - 2\varrho_i - \varrho_{i+1} = 0$ oder dominant.

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)}$$

benimmt sich wie in 3.11; aber auch noch > 0 für $\varrho = \varrho_i$. Demnach fallen die $\pi_{l-1}(\boldsymbol{C}_l)$ fort, außer $\pi_2(\boldsymbol{C}_3)$. Im letzten Fall besitzt die Darstellung zwei Vektoren vom Gewicht 0, was nach 3.3.2 unmöglich ist für $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}$; für $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1$ ist die Dimension der Darstellung wieder zu hoch. Also fällt auch $\pi_2(\boldsymbol{C}_3)$ fort. Ferner fällt noch $\pi_3(\boldsymbol{F}_4)$ fort.

3.14.

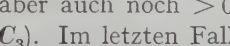


Hier sind ϱ_i und $\varrho_{i-2} + 2\varrho_{i-1} + 2\varrho_i$ Wurzelformen, ihre Differenz aber nicht. $\alpha = (g - \varrho_i) + (g - \varrho_{i-2} - 2\varrho_{i-1} - 2\varrho_i) = 0$ oder dominante Wurzelform

$$2\frac{(g, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} > 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-3},$$
$$= 0 \quad \text{sonst.}$$

Hierdurch fällt $\pi_1(\boldsymbol{B}_l)$ fort für $l > 5$. Für $l = 5$ ist die irreduzible Darstellung nicht reell[14]); die reelle ist 64-dimensional, die Gruppe ist höchstens $(55+3)$-dimensional. Also ist auch $\pi_1(\boldsymbol{B}_5)$ unmöglich.

3.15.

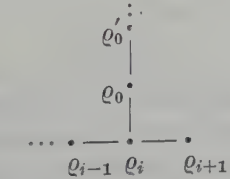


Wir nehmen die Wurzelformen ϱ_i, $\varrho_i + 2\varrho_{i-1} + \varrho_{i-2}$. Dann gilt für $\alpha = 2g - 2\varrho_i - 2\varrho_{i-1} - \varrho_{i-2}$

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-1},\ \varrho_{i-3},\ \varrho_{i+1} \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit fallen die $\pi_l(\boldsymbol{C}_l)$ fort außer für $l = 3$. Auch $\pi_3(\boldsymbol{C}_3)$ hat wieder keine irreduzible reelle Darstellung[15]); die Dimension der Darstellung wird $2 \cdot 20$, die der Gruppe höchstens $21+3$; also keine Transitivität. — Auch $\pi_2(\boldsymbol{F}_4)$ fällt fort.

3.16.



[14]) Siehe Fußnote 12. — $\pi_1(\boldsymbol{B}_l)$ ist reell für $l \equiv 0, 3 \bmod 4$.

[15]) Siehe Fußnote 12. — Die $\pi_l(\boldsymbol{C}_l)$ geben nur für gerades l reelle irreduzible Darstellungen.

Wie in 3.11 sieht man, daß $\alpha = 2g - \varrho_{i-1} - 2\varrho_i - \varrho_{i+1} = 0$ oder dominante Wurzelform ist mit

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} > 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-2}, \varrho_{i+2}, \varrho_0.$$

Alle $\pi_l(\boldsymbol{D}_l)$ und $\pi_s(\boldsymbol{E}_8)$ fallen darum fort. Ersetzt man ϱ_{i+1} durch ϱ_0, so sieht man, daß auch $\pi_6(\boldsymbol{E}_6)$ und $\pi_7(\boldsymbol{E}_7)$ fortfallen.

Ferner sind $\varrho_1 + \cdots + \varrho_i + \varrho_{i+1}$ und $\varrho_1 + \cdots + \varrho_i + \varrho_0$ Wurzelformen, aber ihre Differenz nicht. $\alpha = 2g = 2\varrho_1 - \cdots - 2\varrho_i - \varrho_{i+1} - \varrho_0$ ist 0 oder dominante Wurzelform mit

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i+2}, \varrho_0' \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierdurch fallen $\pi_1(\boldsymbol{D}_l)$ und $\pi_2(\boldsymbol{D}_l)$ für $l > 4$ fort und alle $\pi_i(\boldsymbol{E}_j)$ in Endpunkten des Schemas.

3.17. $\pi_1(\boldsymbol{F}_4)$ besitzt zwei verschwindende Gewichte und ist reell. Also fällt es nach 3.3.2 fort. Dasselbe gilt für $\pi_2(\boldsymbol{G}_1)$.

Es ist zweckmäßig, bei $\boldsymbol{C}_l$ die Indizes 1, 2 zuzulassen, $\pi_1(\boldsymbol{B}_2)$ durch $\pi_1(\boldsymbol{C}_2)$ und $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ durch $\pi_1(\boldsymbol{C}_1)$ zu ersetzen. Ebenso lasse man $\boldsymbol{D}_3$ zu und interpretiere man $\pi_2(\boldsymbol{A}_3)$ als $\pi_3(\boldsymbol{D}_3)$. Schließlich lasse man $\boldsymbol{B}_1$ zu und interpretiere man $2\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ als $2\pi_1(\boldsymbol{B}_1)$.

$\pi_1(\boldsymbol{A}_l)$ und $\pi_l(\boldsymbol{A}_l)$ sind als Gruppen identisch. Wir können uns auf eine beschränken. Dasselbe gilt für $\pi_1(\boldsymbol{D}_4)$, $\pi_2(\boldsymbol{D}_4)$, $\pi_3(\boldsymbol{D}_4)$.

3.18. Die Resultate lassen sich zusammenfassen in

Satz II. Die zulässigen reellen $\boldsymbol{L}$ sind

$\boldsymbol{O}$ (Nullabbildung im 1-dimensionalen $\boldsymbol{K}$),
$\pi_2(\boldsymbol{B}_l)$ $(l \geqq 2)$, $2\pi_1(\boldsymbol{B}_1)$,
$\pi_1(\boldsymbol{B}_3)$, $\pi_1(\boldsymbol{B}_4)$,
$\pi_3(\boldsymbol{D}_l)$ $(l \geqq 3)$,
$\pi_1(\boldsymbol{G}_2)$.

Die zulässigen komplexen $\boldsymbol{L}$ sind

$\pi(\boldsymbol{A}_0)$,
$\pi_1(\boldsymbol{A}_l)$ $(l \geqq 2)$,
$\pi_1(\boldsymbol{C}_l)$ $(l \geqq 1)$.

Die zulässigen $\boldsymbol{J}$ sind: 1. die reellen $\boldsymbol{L}$, 2. die zu den komplexen $\boldsymbol{L}$ gehörigen reellen Darstellungen (doppelter Dimension), eventuell erweitert mit einem direkten Summand — dieser Summand ist eine Darstellung von $\boldsymbol{A}_0$ im Falle $\pi_1(\boldsymbol{A}_l)$ $(l \geqq 2)$ und eine Darstellung von $\boldsymbol{A}_0$ oder $\boldsymbol{A}_1$ im Falle $\pi_1(\boldsymbol{C}_l)$ und im Falle $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$.

Die zulässigen reinen Standuntergruppen sind hiermit bestimmt.

Wir bezeichnen diese Gruppen mit $\nu(\boldsymbol{O}), \nu(\boldsymbol{B}_1), \ldots, \nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_1)$. Die $\pi_1(\boldsymbol{B}_3), \pi_1(\boldsymbol{B}_4)$ unterscheiden wir als $\nu'(\boldsymbol{B}_3), \nu'(\boldsymbol{B}_4)$.

Wir können sie auch folgendermaßen einteilen:

1. die Drehgruppen $G_0UVR(n, re)$ — das sind die $\nu(\boldsymbol{B}_l), \nu(\boldsymbol{D}_l), \nu(\boldsymbol{O}), \nu(\boldsymbol{A}_0), \nu(\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{A}_1)$.

2. die unitären Gruppen (bzw. mit der Determinante 1) $GUVR(n, ko)$ bzw. $G_0UVR(n, ko)$ — das sind die $\nu(\boldsymbol{A}_l + \boldsymbol{A}_0)$ bzw. die $\nu(\boldsymbol{A}_l)$ $(l \geqq 2)$;

3. die quaternion-unitären Gruppen $GUVR(n, qu)$ der Transformationen

$$x_i' = \sum a_{ij} x_j b,$$

wo $\sum_j a_{ij} \bar{a}_{ik} = \delta_{ik}$ ist und $b = 1$ ist oder eine eindimensionale Gruppe oder alle Quaternionen mit $|b| = 1$ durchläuft — das sind die $\nu(\boldsymbol{C}_l)$, $\nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_0)$, $\nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_1)$;

4. die (reine) Gruppe der Automorphismen der Oktavenalgebra (betrachtet für die Oktaven mit verschwindendem Realteil) — das ist die $\nu(\boldsymbol{G}_2)$;

5. die von den infinitesimalen Transformationen

$$x \to \sum_1^7 a_{ij} e_i (e_j x)$$

erzeugte Gruppe [x Oktave, e_i $(i = 0, \ldots, 7)$ Oktavenbasiselemente] — das ist die $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$;

6. die oktaven-unitäre Gruppe (in der Oktavenebene) $GUVR(2, ok)$ — das ist die $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$.

Die beiden letzten sind die niedrigsten Spindarstellungen der $\boldsymbol{B}_3$ und $\boldsymbol{B}_4$.

4. Die zulässigen gemischten Standuntergruppen

4.1. Die Einskomponente J_0 von J ist aus Satz II zu entnehmen. J_0 ist Normalteiler von J. Die Elemente von J induzieren Automorphismen in J_0. Um J zu kennen, braucht man nur in jeder Nebenklasse von J_0 einen Repräsentanten. Hierzu muß man in der Automorphismengruppe von J_0 die Nebenklassen der inneren Automorphismengruppe kennen und weiter im Zentralisator von J_0 innerhalb der allgemeinen orthogonalen Gruppe die Nebenklassen nach dem Zentrum von J_0.

Die Automorphismenklassen sind wohlbekannt[16]), die Zentralisatorklassen sind leicht festzustellen. Hier folgt eine Aufzählung:

1. Drehgruppen in Räumen ungerader Dimension: keine äußeren Automorphismen. Mit allen Drehungen vertauschbar ist nur ± 1.

Drehgruppen in Räumen gerader Dimension: Die Spiegelung an einer Hyperebene repräsentiert die äußeren Automorphismen. Zentralisator trivial. $\boldsymbol{D}_4$ besitzt wohl mehr äußere Automorphismen, die aber auf $\pi_3(\boldsymbol{D}_4)$ nicht eindeutig sind.

[16]) Cartan, E.: Oeuvres I, 555.

2. Unitäre Gruppen: Äußerer Automorphismus $x \to \bar{x}$, also realisierbar als lineare Abbildung in $\boldsymbol{K}$. Die mit $\nu(\boldsymbol{A}_l)$ elementweise vertauschbaren befinden sich in $\nu(\boldsymbol{A}_l + \boldsymbol{A}_0)$.

3. Quaternion-unitäre Gruppen: $\boldsymbol{C}_l$ besitzt keinen äußeren Automorphismus. Die mit $\nu(\boldsymbol{C}_l)$ elementweise vertauschbaren befinden sich in $\nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_1)$.

4. $\nu(\boldsymbol{G}_2)$: Kein äußerer Automorphismus. Mit allen vertauschbar ist nur ± 1.

5. $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$: Kein äußerer Automorphismus. Zentralisator besteht aus ± 1, aber da $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$ eine Spindarstellung ist und also ein nichttriviales Zentrum besitzt, befinden ± 1 sich in $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$.

6. $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$: wie $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$.

5. Der Einbau der reinen Standuntergruppen

5.1. Wir untersuchen nun, in welchen Gruppen F_0 (Einskomponente von F) die erhaltenen J_0 liegen können, und auf welche Weise dies möglich ist. Wir lassen die Indizes 0 vorläufig weg.

Klar ist, daß gelten muß:

5.1.1. $\dim \boldsymbol{F} = \dim \boldsymbol{J} + \dim \boldsymbol{K}$.

5.1.2. J kann keinen Normalteiler von F enthalten, da die Darstellung in F/J sonst nicht treu wäre.

5.1.3. Bei der von J in F induzierten Gruppe von Automorphismen von F ist $\boldsymbol{J}$ invarianter Unterraum; mod $\boldsymbol{J}$ ist diese Darstellung im wesentlichen J selber, also reell irreduzibel (s. 2.6).

5.2. Aus 5.1.3 folgt: ist $\boldsymbol{F}_1$ (reelles) Ideal von $\boldsymbol{F}$, so ist $\boldsymbol{F}_1$ invarianter Unterraum (bei den von J induzierten Automorphismen von $\boldsymbol{F}$), also

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{J} \equiv (\boldsymbol{O}) \text{ oder } \equiv \boldsymbol{F} \mod \boldsymbol{J}.$$

Nach 5.1.2 ist $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{J}$ unmöglich, also

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}.$$

Wir können uns beschränken auf die Annahmen: $\boldsymbol{F}_1$ ist halbeinfach, oder $\boldsymbol{F}_1$ ist abelsch.

5.3. Sei $\boldsymbol{F}_1$ halbeinfach. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung in Ideale

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Entsprechend 5.2 ist auch

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}.$$

Wir zeigen:

$$\boldsymbol{F}_1 \cap \boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}_2 \cap \boldsymbol{J} = (\boldsymbol{0}).$$

Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}_2 \cap \boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{f}_2 \in \boldsymbol{F}_2$. Also

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_2] \in \boldsymbol{F}_2.$$

Weiter ist f_2 darstellbar als

$$f_2 = f_1 + j \quad \text{mit} \quad f_1 \in F_1, \quad j \in J.$$

Also auch

$$[f, f_2] = [f, j] \in J.$$

Daher

$$[f, f_2] \in F_2 \cap J.$$

Also ist $F_2 \cap J$ Ideal von F_2, also auch von F. Nach 5.1.2 folgt hieraus $F_2 \cap J = (O)$. Ebenso ergibt sich $F_1 \cap J = (0)$.

Die Zerlegung von J nach F_1 und F_2,

$$j = f_1 + f_2 \quad (j \in J,\ f_i \in F_i)$$

bewirkt also einen Isomorphismus zwischen F_1 und F_2. Weiter ist $\dim J = \dim F_i = \dim K$. Ein Blick auf die Liste von Satz II lehrt, daß das nur möglich ist für $J = \nu(B_1)$. Dann wird F_i notwendig isomorph mit J.

Infolgedessen wird F (wenigstens im Kleinen) die Drehgruppe der 3-Sphäre.

5.4. Ist (statt 5.2—3) F_1 komplexes Ideal von F (aber halbeinfach), so ist F direkte Summe, etwa

$$F = F_1 + \overline{F}_1.$$

Ist $J \cap F_1 = J \cap \overline{F}_1 = (0)$, so ist $\dim J \leqq \dim F_1$, also $\dim J \leqq \dim K$, also $\dim J = \dim K$, also wieder $J = \nu(B_1)$. F_1 und $\overline{F}_1$ sind isomorph, und F wird (im Kleinen) die Gruppe des hyperbolischen 3-Raumes.

Wäre dagegen $J \cap F_1 \neq (0)$, so hätte J zwei fremde konjugierte isomorphe Ideale $J \cap F_1$ und $J \cap \overline{F}_2$, müßte also nach der Liste von Satz II entweder $\nu(A_0 + A_0)$ oder $\nu(A_1 + A_1)$ sein; dann wäre $\dim F = \dim J + \dim K = 4$ oder 10 und $\dim F_1 = 2$ oder 5, also F_1 nicht halbeinfach.

5.5. Sei (im Gegensatz zu 5.3) nun F_1 abelsch. Das orthogonale Komplement von $F_1 \cap J$ in F_1 sei F_2. Nun ist $F_2 = F_1 \cap K$, also

$$[J, F_2] \subset F_2.$$

$$[F_1, F_2] = (0),$$

also wegen $F = F_1 + J$ (s. 5.2) F_2 Ideal von F. Ferner $F = F_2 + J$, $F_2 \cap J = (0)$.

Ein komplexes F_1 liefert nichts Neues, da dann $F_1 + \overline{F}_1$ auch abelsches Ideal von F ist.

5.6. Aus 5.2—5 folgt nun

Satz III. *F ist entweder (komplex) einfach. Oder F zerfällt in J und ein abelsches Ideal. Oder F gehört zur elliptischen oder hyperbolischen Geometrie des 3-Raumes.*

Wir nennen allgemein die F mit abelschem Ideal *parabolisch*, die andern, je nachdem ob sie kompakt oder nichtkompakt sind, *elliptisch* und *hyperbolisch*.

5.7. Die parabolischen F bieten keine Schwierigkeiten mehr. Wir suchen die übrigen auf. Hierbei verwenden wir 5.1.1 und die Tatsache, daß der Rang von F mindesteus so groß ist wie der von J und höchstens um 1 größer (nämlich wenn das Gewicht 0 auftritt). In der folgenden Aufstellung findet mau die Dimensionen einfacher Gruppen angegeben (erste Spalte) ferner die Summe der Dimensionen eines zugehörigen J (das die einfache Gruppe als Summand L_1 enthält) und K; oberhalb dieser Spalten findet man ein l oder $l+1$, je nachdem der Rang des eventuellen F gleich dem von L_1 ist oder um 1 größer. Aus dieser Tabelle suchen wir erst die Fälle aus, in denen sich wieder die Dimensionszahl einer einfachen Gruppe ergibt mit dem richtigen Rang.

A_l		l	$\leq l+1$	B_l		$\leq l+1$	C_l		l	$\leq l+1$		D_l		l
A_0	1	3		O	0	1								
A_1	3	7	8	B_1	3	6	C_1	3	7	8	10			
A_2	8	14	15	B_2	10	15	C_2	10	18	19	21			
A_3	15	23	24	B_3	21	28	C_3	21	33	34	36	D_3	15	21
A_4	24	34	35	B_4	36	45	C_4	36	52	53	55	D_4	28	36
A_5	35	47	48	B_5	55	66	C_5	55	75	76	78	D_5	45	55
A_6	48	62	63	B_6	78	91	C_6	78	102	103	105	D_6	66	78
A_7	63	79	80	B_7	105	120	C_7	105	133	134	136	D_7	91	105
⋮				⋮			⋮					⋮		

G_2 14 21 (rang 3).

E_6 78, E_7 133, E_8 248, F_4 52.

$v'(B_3)$ $21+8$, $v'(B_4)$ $36+16=52$.

Von den hiernach möglichen Paaren fallen noch folgende fort: $v(C_l+A_1)$ in B_{l+1} — die B_{l+1} ist reell linear darstellbar in $2l+1$ Dimensionen, die C_l erst in $4l$ Dimensionen; das ist ein Widerspruch für $l>1$. Der Fall $l=1$ ist die Einbettung von D_2 in B_3.

$v(D_l)$ in C_l — durch die Wurzeln und Gewichte von $J=v(D_l)$ ist F vollkommen bestimmt; als F kommt nur B_l in Frage.

$v(G_2)$ in C_3 — das ergäbe eine 6-dimensionale lineare Darstellung der G_2.

$v(C_4)$ in F_4 — $v(C_4)$ hat Wurzeln, die Doppelten von Gewichten sind; beide träten zusammen als Wurzeln von F auf.

$v(C_7)$ in E_7 — dieselben Gründe.

$v(C_5+A_1)$ in E_6 — hier hätte man eine Darstellung der E_6 als Transformationsgruppe einer 20-dimensionalen Mannigfaltigkeit, während so etwas erst in 26 Dimensionen möglich ist.

Satz IV. *Die möglichen Paare J, F im nichtparabolischen Fall sind:*

1. die n-dimensionale Drehgruppe in einer reellen Form der komplexen $(n+1)$-dimensionalen Drehgruppe.

2. $v(A_l+A_0)$ in einer reellen Form der komplexen A_{l+1} $(l\geq 1)$.

3. $v(C_l+A_1)$ in einer reellen Form der komplexen C_{l+1} $(l\geq 1)$.

4. $\nu(\boldsymbol{G}_2)$ *in einer reellen Form der komplexen* $\boldsymbol{B}_3$.

5. $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$ *in einer reellen Form der komplexen* $\boldsymbol{F}_4$.

6. $\nu(\boldsymbol{A}_2)$ *in einer reellen Form der komplexen* $\boldsymbol{G}_2$.

5.8. Wir werden noch zeigen, daß die in Satz IV aufgeführten Einbettungen wirklich vorkommen, und daß sie wesentlich eindeutig bestimmt sind. Wir behandeln erst die elliptischen Fälle.

1. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{B}_l)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_{l+1}$. Man kann einen maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{J}$ mit einem Element von $\boldsymbol{F}$ ergänzen, das zum Gewicht 0 gehört. Das ist dann ein maximal abelscher Unterring von $\boldsymbol{F}$. Man gehe umgekehrt von einem solchen aus. Die Wurzelformen sind $\pm\omega_i\pm\omega_j$. Um $\boldsymbol{J}$ aus $\boldsymbol{F}$ herauszuheben, muß man in dem maximal abelschen Unterring eine lineare Relation einführen, die $4l$ Wurzelformen paarweise zusammenfallen läßt (denn jedes Gewicht $\neq 0$ von $\boldsymbol{J}$ ist einer Wurzelform von $\boldsymbol{J}$ gleich). Im wesentlichen die einzige derartige Relation ist $\omega_{l+1}=0$. (Für $l=3$ kommt noch $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=0$ hinzu, was aber bekanntlich nichts Neues liefert.) Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{J}$ ist hierdurch bestimmt. Um ganz $\boldsymbol{J}$ zu erhalten, muß man noch

$$e_{\pm\omega_i\pm\omega_j},\quad \alpha_i e_{\omega_i+\omega_{l+1}}+\beta_i e_{\omega_i-\omega_{l+1}},\quad -\bar{\alpha}_i e_{-\omega_i+\omega_{l+1}}-\bar{\beta}_i e_{-\omega_i-\omega_{l+1}} \qquad (i\leqq l)$$

hinzufügen. Kommutatorbildung zeigt, daß α_i und β_i im wesentlichen unabhängig von i sein müssen. Durch innere Automorphismen von $\boldsymbol{F}$ können diese $\boldsymbol{J}$ ineinander übergeführt werden; hierzu verwende man $\exp \boldsymbol{h}$ mit einem $\boldsymbol{h}$ aus dem maximal abelschen Unterring, das $\omega_1=\cdots=\omega_l=0$ genügt.

$\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{D}_l)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}_l$. Man muß $2l$ von den Wurzelformen $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$ streichen (und als Gewichte erklären), für die paarweise gilt, daß entweder die Summe 0 ist, oder Summe und Differenz eine Wurzelform ist. Das geht nur auf eine Weise.

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{G_0ElR}(n, \mathrm{re})$ von $\sum x_i^2=0$ im projektiven Raum (elliptische Geometrie).

2. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_{l+1}$. Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0$ ist auch einer von $\boldsymbol{A}_{l+1}$. Man gehe von diesem aus. Die Wurzelformen von $\boldsymbol{A}_{l+1}$ seien $\pm\omega_i, \omega_i-\omega_j$. Um $\boldsymbol{J}$ aus $\boldsymbol{F}$ herauszuheben, muß man die Wurzelformen einteilen in Wurzelformen und Gewichte von $\nu(\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0)$; und zwar müssen zwei Systeme Σ_+, Σ_- von $l+1$ Gewichten auftreten, so daß aus $g\in\Sigma_+$ folgt $-g\in\Sigma_-$ und aus $g, g'\in\Sigma_+$ folgt: $g-g'$ ist Wurzelform. Σ_+ läßt sich im wesentlichen auf zwei Arten wählen:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{l+1}$$

oder

$$-\omega_1, \omega_2-\omega_1, \ldots, \omega_{l+1}-\omega_1.$$

Das zweite System entsteht aus dem ersten durch Spiegelung an der Wurzelebene $\omega_1=0$, also durch einen Automorphismus.

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GElR}(n, \mathrm{ko})$ von $\sum|x_i|^2=0$ im komplexen projektiven Raum (komplex-elliptische Geometrie).

3. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}_{l+1}$. In bezug auf einen maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{C}_l$ sind die Wurzelformen $\neq 0$ und Gewichte von $\nu(\boldsymbol{C}_l)$:

$$\pm 2\omega_i,\ \pm\omega_i\pm\omega_j \quad \text{und} \quad \pm\omega_i.$$

Die von $\nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1)$ werden mit dem Parameter ϑ, der von dem maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{A}_1$ abhängt:

$$\pm 2\omega_i,\ \pm\omega_i\pm\omega_j,\ \pm 2\vartheta \quad \text{und} \quad \pm\omega_i\pm\vartheta.$$

Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1$ ist auch einer von $\boldsymbol{C}_{l+1}$. Wir sondern aus den Wurzelformen von $\boldsymbol{C}_{l+1}$ $4l$ Gewichte ab, die folgende Eigenschaften besitzen müssen: Sind g und g' Gewichte, so ist $g+g'$ oder $g-g'$ Wurzelform; niemals ist $g\pm 2g'$ Wurzelform. Diese Bedingungen bestimmen im wesentlichen eindeutig die Wahl: $\pm\omega_i\pm\omega_{l+1}$.

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GElR}(n, \mathrm{qu})$ von $\sum|x_i|^2=0$ im quaternionprojektiven Raum (quaternion-elliptische Gruppe).

4. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{G}_2)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}_3$. Man ergänze einen maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{J}$ mit einem Element von $\boldsymbol{F}$, das zum Gewicht 0 gehört. Das ist dann ein maximal abelscher Unterring von $\boldsymbol{F}$. Man gehe von diesem aus. Die Wurzelformen sind $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$ $(i, j=1, 2, 3)$. Um $\boldsymbol{J}$ aus $\boldsymbol{F}$ herauszuheben, muß man im maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{F}$ eine lineare Relation einführen, die 12 Wurzelformen paarweise zusammenfallen läßt, aber so, daß keine 0 wird (denn jedes Gewicht $\neq 0$ von $\boldsymbol{J}$ ist einer Wurzelform von $\boldsymbol{J}$ gleich). Im wesentlichen die einzige derartige Relation ist $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$. Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{J}$ ist hierdurch bestimmt. Um ganz $\boldsymbol{J}$ zu erhalten, muß man noch

$$e_{\omega_i-\omega_j},\quad \alpha_1 e_{\omega_2+\omega_3}+\beta_1 e_{-\omega_1},\quad \text{usw.}$$

hinzufügen. Man schließt dann wie bei $\nu(\boldsymbol{B}_l)$, $\boldsymbol{D}_{l+1}$ weiter auf die eindeutige Bestimmtheit.

F wird auf der 7-Sphäre induziert durch die Spindarstellung von B_3 im 8-Raum.

5. $\boldsymbol{J}=\nu'(\boldsymbol{B}_4)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_4$. Die Wurzelformen $\neq 0$ und Gewichte von $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$ sind

$$\pm\omega_i,\ \pm\omega_i\pm\omega_j \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4).$$

Zusammen bilden sie das Wurzelformensystem der $\boldsymbol{F}_4$. Geht man umgekehrt von diesem aus, so sieht man, daß die $\pm\omega_i\pm\omega_j$ als Gewichte nicht in Frage kommen, denn zu jedem Gewicht g muß es eine Wurzelform α geben, so daß $\alpha-2g$ Wurzelform ist, und das ist bei $\pm\omega_i\pm\omega_j$ nicht der Fall. Also müssen die $\pm\omega_i\pm\omega_j$ notwendig Gewichte sein. Man darf weiter annehmen, daß auch ω_1 eine Wurzelform ist; dann ergeben sich alle $\pm\omega_i$ als Wurzelformen.

F ist die elliptische Gruppe der Oktavenebene $\mathrm{GElR}(2, \mathrm{ok})$.

6. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{A}_2)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}_2$. Die Wurzelformen und Gewichte von $\nu(\boldsymbol{A}_2)$ sind

$$\omega_i-\omega_j \quad \text{und} \quad \pm\omega_i \qquad (\omega_1+\omega_2+\omega_3=0).$$

Das sind auch die Wurzelformen $\neq 0$ von G_2. Zu jeder Wurzelform $\neq 0$ gibt es ein Gewicht g, so daß $\alpha - 3g$ Wurzelform ist. Das ist aber nur bei den $\pm\omega_i \pm \omega_j$ der Fall.

F wird auf der 6-Sphäre induziert von der Darstellung von G_2 als Automorphismengruppe der Oktaven.

Damit ist in allen elliptischen Fällen die Existenz und Eindeutigkeit der Einbettung nachgewiesen.

5.9. Wir untersuchen nun die Einbettungen im hyperbolischen Fall.

$\boldsymbol{F}$ ist nach Satz IV reelle Form einer einfachen Gruppe (von einer Ausnahme abgesehen). Eine reelle Form ist durch ihre Signatur[17]) gekennzeichnet (δ = Anzahl der positiven minus Anzahl der negativen Quadrate der Killing-Cartanschen Form). Die Anzahl der negativen Quadrate ist die maximale Dimension kompakter Untergruppen, also $\geqq \dim J$. Die Summe beider Anzahlen ist $\dim F$. Hieraus folgt:

$$\delta \leqq \dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J}.$$

Wir suchen in der Cartanschen Aufzählung die reellen Formen, die dieser Ungleichung genügen. Die unitären Formen lassen wir weg.

1. $\boldsymbol{J} = v(\boldsymbol{B}_l)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{D}_{l+1}$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = (l+1)(2l+1) - 2l(2l+1) = -2l^2 + l + 1.$$

$$\delta = -l - 1; \quad l + 1 - 2m^2 \qquad (m = 0, 1, \ldots, l+1).$$

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GHyR}(2l+1, \mathrm{re})$ von $\sum_1^{2l+1} x_i^2 - x_{2l+2}^2 = 0$ (Gruppe des hyperbolischen Raumes).

$\boldsymbol{J} = v(\boldsymbol{D}_l)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_l$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = l(2l+1) - 2l(2l-1) = l(3-2l).$$

$$\delta = l - 2m(m+1) \qquad (m = 0, 1, \ldots, l).$$

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GHyR}(2l, \mathrm{re})$ von $\sum_1^{2l} x_i^2 - x_{2l+1}^2 = 0$ (Gruppe des hyperbolischen Raumes).

2. $\boldsymbol{J} = v(\boldsymbol{A}_l + \boldsymbol{A}_0)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_{l+1}$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = (l+3)(l+1) - 2(l+1)^2 = 1 - l^2.$$

$$\delta = l + 1, \; -l - 3^{18}); \; 1 - m^2 \qquad (m = l+2, l, \ldots, \geqq 0).$$

Für $l = 2$ ist $\delta = -l - 3 = -5$ mit der Ungleichung verträglich. Wir haben dann als reelle Form die Drehgruppe im 6-Raum. Die maximal kompakte Untergruppe ist der B_2 isomorph; sie muß J enthalten. Das kann die

[17]) Bei Cartan „caractère" genannt. Siehe Oeuvres I, 399—491.

[18]) Nur für gerades l. — Man korrigiere bei Cartan, S. 400, Zeile 7:

$\left[\frac{l+3}{2}\right]$ statt $\left[\frac{l+2}{2}\right]$; Zeile 8: $\left[\frac{l+1}{2}\right]$ statt $\left[\frac{l}{2}\right]$.

B_2 aber nicht, denn das würde die Existenz einer treuen Darstellung der B_2 in einer (dim B_2 − dim J)-dimensionalen (= 1-dimensionalen) Mannigfaltigkeit bedeuten. Übrig bleibt:

F ist die Invarianzgruppe GHyR$(l+1, \text{ko})$ von $\sum_1^{l+1} x_i^2 - x_{l+2}^2 = 0$ (Gruppe des komplex hyperbolischen Raumes).

3. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_1)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}_{l+1}$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = (l+1)(2l+3) - 2\big(l(2l+1)+3\big) = -2l^2 + 3l - 3$$

$$\delta = l+1; \quad -l-1-2m^2 \qquad (m = l+1, l-1, \ldots, \geqq 0).$$

F ist die Invarianzgruppe GHyR(l, qu) von $\sum_1^{l} x_i^2 - x_{l+1}^2 = 0$ (Gruppe des quaternionhyperbolischen Raumes).

4. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{G}_2)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_3$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = 21 - 28 = -7.$$

$$\delta = 3, \ -1, \ -9, \ -21.$$

Im Falle $\delta = -9$ ist die maximal kompakte Untergruppe der D_3 isomorph, die somit die G_2 enthalten müßte. Das ist unmöglich, denn dann besäße die G_2 eine lineare Darstellung im 6-Raum.

Es gibt hier keine hyperbolische Form.

5. $\boldsymbol{J} = \nu'(\boldsymbol{B}_4)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_4$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = 52 - 72 = -20.$$

$$\delta = 4, \ -20, \ -52.$$

F ist die hyperbolische Gruppe der Oktavenebene GHyR$(2, \text{ok})$.

6. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{A}_2)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_2$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = 14 - 16 = -2.$$

$$\delta = 2; \ -8, \ 0.$$

Keine hyperbolische Form.

In allen Fällen stimmten die Dimension von J und die der maximal kompakten Untergruppe überein. Hieraus folgt die eindeutige Bestimmtheit der Einbettung.

5.10. Die zulässigen Paare $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ sind hiermit vollständig aufgezählt. Die im elliptischen und hyperbolischen Fall angegebenen Beispiele von Paaren J, F geben eine vollständige Aufzählung im Kleinen bei zusammenhängendem F.

6. Die Verhältnisse im Großen

6.1. Sei F zusammenhängend. Die einfach zusammenhängende Überlagerung heiße $\tilde{F}$. Es gibt eine Untergruppe $\tilde{J}$ von $\tilde{F}$, so daß die kanonische Isomorphie zwischen F/J, $\tilde{F}/\tilde{J}$ und R stattfindet.

Sei $\tilde{J}_0$ die Einskomponente von $\tilde{J}$. Dann ist $\tilde{R} = \tilde{F}/\tilde{J}_0$ die einfach zusammenhängende Überlagerung von R.

Das Paar $\tilde{J}_0, \tilde{F}$ ist durch $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ eindeutig bestimmt. Wir erhalten alle zugehörigen Typen im Großen, wenn wir $\tilde{J}_0$ *innerhalb* $\tilde{F}$ zu einer gemischten Standuntergruppe $\tilde{J}$ mit der Einskomponente $\tilde{J}_0$ erweitern. Das ergibt das Paar $\tilde{J}/\tilde{J} \cap Z, \tilde{F}/\tilde{J} \cap Z$, wenn Z das Zentrum von $\tilde{F}$ ist.

Wir können $\tilde{J}_0, \tilde{F}$ auch ersetzen durch $\tilde{J}_0/\tilde{J}_0 \cap Z, \tilde{F}/\tilde{J}_0 \cap Z$, die wir J^*, F^* nennen, mit dem zugehörigen einfach zusammenhängenden $R^* = F^*/J^*$. Alle zu $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ gehörigen zusammenhängenden Typen ergeben sich dann wieder durch Erweiterung von J^* zu einer gemischten Standuntergruppe mit der Einskomponente J^*. Um zu gegebenem $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ das Paar J^*, F^* zu finden, braucht man nur eine Form im Großen zu wählen mit einfach zusammenhängendem F^*/J^*.

Sei M die Menge der Fixpunkte von J^* in R^*. Sei J eine gemischte Erweiterung von J^* innerhalb F^*. Dann ist J^* Normalteiler von J. Ist $j \in J$ und $m \in M$, so ist $J^* jm = j J^* m = jm$, also $jm \in M$. Also $JM = M$.

Ist J echte Erweiterung von J^*, so muß also M aus mehr als einem Punkt bestehen. J^* vertauscht dann die Punkte von M. Ist J^* „asystatisch", d.h. besitzt J^* nur einen Fixpunkt, so ist keine echte Erweiterung möglich.

6.2. In den parabolischen Fällen nehme man als R^* das abelsche Ideal $\boldsymbol{K}$ von $\boldsymbol{F}$. Als F^* nehme man die von $\exp \boldsymbol{J}$ und der Translationsgruppe des linearen Raumes $\boldsymbol{K}$ erzeugte Gruppe. R^* ist einfach zusammenhängend; $\exp \boldsymbol{J}$ ist die größte kompakte Untergruppe von F^*, also innerhalb F nicht erweiterbar. Zu $\boldsymbol{J}$ gibt es also im Großen nur ein parabolisches Paar J, F.

6.3. In den hyperbolischen Fällen ist R^* ein hyperbolischer Raum, d.h. die Menge

$$\sum_1^n |x_i|^2 < |x_{n+1}|^2$$

im projektiven n-Raum (die x_j sind reell, komplex, Quaternionen oder Oktaven). R^* ist zusammenziehbar:

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{1-\lambda} x_{n+1}\right), \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Also ist R^* sicher einfach zusammenhängend. F^* besteht aus den mit der Identität verbindbaren Projektivitäten, die $\sum |x_i|^2 = |x_{n+1}|^2$ invariant lassen; J^* läßt obendrein etwa $(0, 0, \ldots, 1)$ invariant, und das ist der einzige Fixpunkt. Also ist J^* nicht erweiterbar und gibt es im Großen keine anderen Typen.

6.4. Wir behandeln nun die elliptischen Fälle. Der komplex projektive Raum, der quaternion projektive Raum und die projektive Oktavenebene sind einfach zusammenhängend, die Gruppen sind asystatisch. Im Großen kommt also nichts Neues hinzu. Der reelle projektive Raum ist nicht

einfach zusammenhängend; die einfach zusammenhängende Überlagerung ist die der sphärischen Geometrie. J^* hat zwei Fixpunkte, die Erweiterung von J^* führt zur elliptischen Geometrie zurück.

In den übrigen zwei Fällen war R die 6-Sphäre und die 7-Sphäre. J^* besitzt zwei Fixpunkte, die Erweiterung von J^* führt zu entsprechenden Gruppen des projektiven 6-Raumes und 7-Raumes.

7. Der Übergang zu gemischten F

7.1. F_0, die Einskomponente eines F, ist nun vollständig zu übersehen. Nach 2.3 (Anfang des Beweises) erhalten wir F aus F_0, wenn wir $J \cap F_0$ geeignet erweitern, nun aber *außerhalb* F_0. Über die möglichen Erweiterungen von $J \cap F_0$ haben wir ein Bild auf Grund von 4.

7.2. Parabolisch: Die Drehgruppen J werden ergänzt zu orthogonalen Gruppen (mit Spiegelungen). Im unitären Fall kann J eine abgeschlossene Gruppe zwischen $\nu(A_l)$ und $\nu(A_l + A_0)$ sein, noch erweitert mit $x \to \bar{x}$; im quaternion-unitären Fall eine abgeschlossene Gruppe zwischen $\nu(C_l)$ und $\nu(C_l + A_1)$; im oktaven-unitären Fall $(J = \nu'(B_3))$ ist keine Erweiterung möglich. Im Fall $J = \nu(G_2)$ ist Erweiterung mit $x \to -x$ möglich. Im Fall $J = \nu'(B_3)$ gibt es keine Erweiterung.

Alle möglichen Erweiterungen von J sind ohne weiteres zu Erweiterungen von F fortzusetzen.

7.3. Elliptisch: Die sphärischen Geometrien werden mittels einer Spiegelung erweitert. Bei den elliptischen Geometrien gerader Dimension ist das keine echte Erweiterung, bei denen ungerader Dimension wohl. Die unitären Geometrien werden mit $x \to \bar{x}$ erweitert. Für die elliptische Quaternionen- und Oktavengeometrien existiert keine Erweiterung. Von den übrigen besitzt nur die der 6-Sphäre eine Erweiterung.

7.4. Hyperbolisch: Die reelle hyperbolische Geometrie wird mittels einer Spiegelung erweitert, die unitäre mittels $x \to \bar{x}$. Die anderen sind nicht zu erweitern.

7.5. Als Resultat ergibt sich nun die Aufzählung von Hauptsatz I (Einleitung).

8. Ein Nachtrag

8.1. Wir müssen nun noch einen Schluß zu Satz I (s. 2.8) rechtfertigen. Wir zeigen, daß eine Faktorkette von Liegruppen F, wie sie im Hauptsatz I aufgezählt werden, $F, F', F'', \ldots$, in der jede Gruppe echte Faktorgruppe (nach abgeschlossenem Normalteiler) der eventuell vorhergehenden ist, nach höchstens fünf Schritten abbricht.

8.2. Jeder diskrete Normalteiler F_1 eines F besteht aus höchstens zwei Elementen. Denn sei F_0 die Einskomponente von F, $f_1 \in F$. Dann ist die Menge der $f_0 f_1 f_0^{-1}$ mit $f_0 \in F_0$ einerseits zusammenhängend, andererseits diskret,

also einpunktig, also $=(f_1)$. Also f_1 im Zentralisator von F_0. Für jedes $x \in R$ bilde man die Menge $M(x)$ der $x' \in R$ mit der Eigenschaft: aus $fx = x$ $(f \in F_0)$ folgt $fx' = x'$. Dann vertauscht jedes $f_1 \in F_1$ die Elemente von $M(x)$ untereinander. Man sieht in der Aufzählung, daß $M(x)$ für jedes x höchstens zweipunktig ist. Hieraus folgt die Behauptung.

8.3. Wir betrachten in der Faktorkette $F, F', \ldots$ die Dimensionen der auftretenden Gruppen. Ist $\dim F^{(i)} = \dim F^{(i+1)}$, so ist der zugehörige Normalteiler diskret, also von der Mächtigkeit 2; der Kern des Homomorphismus $F^{(i+1)} \to F^{(i+2)}$ kann dann nicht diskret sein. Also $\dim F^{(i+1)} > \dim F^{(i+2)}$. Nun ist ein Absinken der Dimensionen höchstens zweimal möglich; dieses Maximum tritt ein, wenn F oder F' parabolisch und die Faktorgruppe nach dem Abelschen Normalteiler eine Gruppe von der Dimension 6 ist, die selber einen Normalteiler von der Dimension 3 besitzt. Die Länge der Kette ist dann höchstens 5.

Mathematisch Instituut, Rijks-Universiteit, Utrecht (Niederlande)

(Eingegangen am 9. August 1955)

Brauer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 406—444 (1956)

Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung

Dem Andenken meines verehrten Lehrers Issai Schur gewidmet

Von
Richard Brauer

§ 1. Einleitung

In seinen Vorlesungen über Gruppentheorie stellte I. Schur es gelegentlich als wünschenswert dar, die Darstellungen der Gruppen endlicher Ordnung von einem mehr zahlentheoretischen Standpunkt aus zu untersuchen. Die folgenden Ausführungen sind ein Versuch, ein solches Programm in Angriff zu nehmen.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe endlicher Ordnung g, und $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{G}, \Omega)$ sei die zugehörige Gruppenalgebra über einem gegebenen Körper Ω. Das allgemeine Element von Γ hat dann die Form

$$\alpha = \sum_{G \in \mathfrak{G}} a_G G, \tag{1.1}$$

wo die Koeffizienten a_G Elemente aus Ω sind. Wählen wir Ω als algebraischen Zahlkörper endlichen Grades, und ist $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen algebraischen Zahlen in Ω, so bildet die Menge der Elemente (1.1) mit Koeffizienten a_G aus $\mathfrak{o}$ eine Ordnung J in Γ[1]). Man kann dann die Zahlentheorie in J untersuchen. Dabei ist zu beachten, daß J für $g > 1$ nicht Maximalordnung ist, so daß die Ergebnisse von Speiser, Artin und Hasse nicht ohne weiteres angewendet werden können. Zwar ist Γ halbeinfach, und daher kann man J in eine Maximalordnung einbetten, doch gehen dabei gerade die von unserem Standpunkt interessantesten arithmetischen Eigenschaften verloren.

Als erste Frage haben wir die Untersuchung der Primideale $\mathfrak{P}$ von J[2]). Der Durchschnitt von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{o}$ ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$, und dann ist $J > \mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{p} J$. Die $\mathfrak{p}$ enthaltenden Ideale von J entsprechen eineindeutig den Idealen des Restklassenringes $J^* = J/\mathfrak{p} J$. Die Restklassenabbildung (mod $\mathfrak{p} J$) bildet den Teilring $\mathfrak{o}$ von J auf einen Körper Ω^* ab, der mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ identifiziert werden darf. Man sieht dann, daß man J^* als die Gruppenalgebra $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ von $\mathfrak{G}$ über Ω^* auffassen kann;

$$J^* = \Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*); \qquad \Omega^* = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}. \tag{1.2}$$

[1]) Einige Begriffe und Resultate der Algebrentheorie, die im folgenden verwendet werden, sind im Anhang (§ 14) zusammengestellt.

[2]) Vgl. § 14, (a) und (c). Unter einem Ideal wird stets ein *zweiseitiges* Ideal verstanden. Ferner wird von einem Ideal einer Ordnung J vorausgesetzt, daß es von Null verschiedene Elemente von $\mathfrak{o}$ enthält.

Ein $\mathfrak{p}$ enthaltendes Ideal $\mathfrak{P}$ von J ist dann und nur dann Primideal von J, wenn sein Bild $\mathfrak{P}^*$ in J^* Primideal von J^* ist. Aus der Strukturtheorie der Algebren folgt, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn $\mathfrak{P}^*$ maximal in J^* ist, d.h. wenn $J^*/\mathfrak{P}^*$ eine einfache Algebra ist.

Es seien $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$ die wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch lineare Transformationen mit Koeffizienten aus Ω^*. Jedes $\mathfrak{F}_i$ kann zu einer Darstellung von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ erweitert werden. Ist $\mathfrak{P}_i^*$ der Kern von $\mathfrak{F}_i$ in diesem Sinn, so sieht man leicht, daß $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \ldots, \mathfrak{P}_l^*$ gerade die verschiedenen Primideale von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ sind. Das $\mathfrak{P}_i^*$ entsprechende Ideal $\mathfrak{P}_i$ von J besteht aus denjenigen Elementen α von J, für deren Restklasse $\alpha^* \pmod{\mathfrak{p}J}$ die Gleichung $\mathfrak{F}_i(\alpha^*) = 0$ gilt. Die so erhaltenen Ideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_l$ sind dann die sämtlichen Primidealteiler von $\mathfrak{p}J$ in J. Es ist also die Untersuchung der zu einem festen Primideal $\mathfrak{p}$ von Ω gehörigen Primideale $\mathfrak{P}$ von J äquivalent mit der Untersuchung der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in Ω^*. Mit derartigen „modularen" Darstellungen von endlichen Gruppen haben sich C. J. Nesbitt und der Verfasser in einigen früheren Arbeiten befaßt[3]). In der vorliegenden Arbeit treten die modularen Gruppencharaktere nur als Hilfsmittel auf. Alles, was hier benötigt ist, ist mit kurzen Beweisskizzen in § 3 zusammengestellt.

Will man die Struktur des Ideals $\mathfrak{p}J$ von J weiter verfolgen, so liegt es nahe, die Restklassenalgebra $J^* = \Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ als direkte Summe von direkt unzerlegbaren Idealen $\mathfrak{A}_i^*$ darzustellen;

$$\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*) = \mathfrak{A}_1^* \oplus \mathfrak{A}_2^* \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t^*. \tag{1.3}$$

Setzt man dann

$$\mathfrak{B}_m^* = \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,t \\ i \neq m}} \mathfrak{A}_i^*; \quad \mathfrak{A}_m^* = \bigcap_{\substack{i=1,2,\ldots,t \\ i \neq m}} \mathfrak{B}_i^*,$$

und ist $\mathfrak{B}_m$ das $\mathfrak{B}_m^*$ entsprechende Ideal von J, so ist

$$\mathfrak{p}J = \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{B}_t. \tag{1.4}$$

Die Ideale $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_j$ sind für $i \neq j$ teilerfremd; $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j) = J$; keins der Ideale $\mathfrak{B}_i$ läßt sich nicht-trivial als Durchschnitt teilerfremder Ideale darstellen. Die Darstellungen (1.3) und (1.4) sind eindeutig bestimmt. Wir nennen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_t$ die *Blockideale* von $\mathfrak{p}J$ in J.

Da $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_t \subseteq \mathfrak{p}J$ ist, teilt jeder Primidealteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}J$ genau eins der Blockideale $\mathfrak{B}_\tau$. Ist also B_τ die Menge der Primidealteiler von $\mathfrak{B}_\tau$, so sind die l Primideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_l$ auf t „*Blöcke*" $B_1, B_2, \ldots, B_t$ verteilt. Nach dem oben Gesagten können wir dann auch von einer Verteilung der l modularen Darstellungen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$ auf die t Blöcke sprechen. Wie in § 4 genauer auseinandergesetzt werden wird, führt dies auch zu einer Verteilung der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ auf die t Blöcke.

[3]) Man vgl. R. Brauer and C. Nesbitt, University of Toronto Studies, Math. Series No. 4, 1937; Annals of Math. (2) **42**, 556, Part I.

Diese Blöcke von Darstellungen sollen in der vorliegenden Arbeit untersucht werden[4]).

Kennt man die Charaktere von $\mathfrak{G}$, so kann man daraus weitgehende Information über die Blöcke und die zugehörigen Blockideale ablesen. Dies wird in § 4 und § 5 ausgeführt. Ist p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare rationale Primzahl, und enthält g die Primzahl p genau in der Potenz p^a, so verstehen wir unter dem *Defekt* eines Blocks B die kleinste ganze Zahl d, für die p^{a-d} die Grade aller Darstellungen in B teilt (§ 6).

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, Zusammenhänge zwischen gruppentheoretischen Eigenschaften von $\mathfrak{G}$ und Eigenschaften der Blöcke aufzudecken. Daraus ergeben sich dann neue Eigenschaften der Charaktere von $\mathfrak{G}$. Diese Aufgabe wird in § 7 in Angriff genommen. Auf Grund einer einfachen gruppentheoretischen Bemerkung ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Blöcken gewisser Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und den Blöcken von $\mathfrak{G}$. Wir können dann in § 8 jedem Block B von $\mathfrak{G}$ vom Defekt d eine Untergruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung p^d, seine *Defektgruppe*, zuordnen. Mit $\mathfrak{D}$ ist auch jede konjugierte Gruppe Defektgruppe von B; davon abgesehen ist $\mathfrak{D}$ eindeutig durch B bestimmt.

Ist $\mathfrak{D}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz p^d von p ist und ist $\mathfrak{N}$ der Normalisator von $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Blöcken $\tilde{B}$ von $\mathfrak{N}$ vom Defekt d und den Blöcken B von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ (§ 10). Die Behandlung von $\mathfrak{N}$ läßt sich dann weiter auf Untersuchung von $\mathfrak{N}/\mathfrak{D}$ zurückführen. Für die Werte der Charaktere χ_i in B erhält man Kongruenzen nach Potenzen von $\mathfrak{p}$, vgl. (12A).

Interessiert man sich z. B. für die Bestimmung der Anzahl der Blöcke B von einem gegebenen Defekt d, so sieht man jetzt, daß man diese Frage im Fall eines positiven d vollständig auf die Untersuchung von Gruppen von kleinerer Ordnung als g zurückführen kann. Im Fall $d=0$ versagen diese Methoden, da hier $\mathfrak{N}=\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}=\{1\}$ ist. Als Ersatz leiten wir im § 13 ein andersartiges Resultat für die Anzahl der Blöcke vom Defekt 0 her.

Die Untersuchung soll in einer weiteren Mitteilung fortgesetzt werden, während Anwendungen an anderer Stelle behandelt werden sollen.

§ 2. Bezeichnungen

Im folgenden ist $\mathfrak{G}$ stets eine endliche Gruppe der Ordnung g. Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{G}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ den *Normalisator* von $\mathfrak{A}$, d. h. die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Elemente X die Gleichung $X\mathfrak{A}=\mathfrak{A}X$ erfüllen. Ferner sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ der *Zentralisator* von $\mathfrak{A}$, das ist die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Elemente mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind. Besteht $\mathfrak{A}$ aus einem einzigen Element A, so schreiben wir $\mathfrak{N}(A)$ $(=\mathfrak{C}(A))$ für $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. Die Ordnung von $\mathfrak{N}(A)$ werde mit $n(A)$ bezeichnet.

[4]) Über einen Teil der Ergebnisse berichten ohne Beweis drei Noten, Proc. Nat. Acad. Sci. **30**, 109—114 (1944); **32**, 182—186, 215—219 (1946).

Es seien im folgenden $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$ stets die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$. Ist also $G_\alpha \in \mathfrak{K}_\alpha$, so besteht $\mathfrak{K}_\alpha$ aus $g/n(G_\alpha)$ Elementen. Die Anzahl k der Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ ist dann auch die Anzahl der irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$, die mit $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ bezeichnet werden sollen. Es sei x_i der Grad von χ_i; $x_i = \chi_i(1)$.

Ist Ξ ein beliebiger Körper, so kann man die Gruppenalgebra $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$ von $\mathfrak{G}$ über Ξ bilden. Dies ist eine assoziative Algebra der Dimension g über Ξ, deren g Basiselemente so gewählt werden können, daß sie bei Multiplikation eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe bilden. Man kann dann die Basiselemente mit den Elementen von $\mathfrak{G}$ identifizieren, und dann ist das allgemeine Element von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$ von der Form (1.1) mit Koeffizienten $a_G \in \Xi$. Offenbar ist das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ auch Einheitselement von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$. Mit K_α werde stets das Element von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$ bezeichnet, das die Summe der Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ ist,

$$K_\alpha = \sum_{G \in \mathfrak{K}_\alpha} G. \tag{2.1}$$

Bekanntlich bilden die k Elemente $K_1, K_2, \ldots, K_k$ eine Basis des Zentrums $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ der Gruppenalgebra. Wegen dieses Zusammenhangs nennen wir $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ die *Klassenalgebra* von $\mathfrak{G}$ über Ξ. Die Multiplikation der Basiselemente ist durch Formeln

$$K_\alpha K_\beta = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma \tag{2.2}$$

gegeben. Hier ist $a_{\alpha\beta\gamma}$ eine nicht-negative ganze rationale Zahl, die von der Wahl des Körpers unabhängig ist. Ist G_γ ein Element von $\mathfrak{K}_\gamma$, so ist nämlich $a_{\alpha\beta\gamma}$ die Anzahl der geordneten Paare (X, Y) von $\mathfrak{G}$, die die Bedingungen

$$XY = G_\gamma, \quad X \in \mathfrak{K}_\alpha, \quad Y \in \mathfrak{K}_\beta$$

erfüllen. Hat Ξ Primzahlcharakteristik p, so kann man natürlich $a_{\alpha\beta\gamma} \pmod p$ nehmen.

Ist Ξ der Körper der komplexen Zahlen, und ist $\mathfrak{X}_i$ die zum irreduziblen Charakter χ_i von $\mathfrak{G}$ gehörige Darstellung von $\mathfrak{G}$, so kann man $\mathfrak{X}_i$ als irreduzible Darstellung von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$ auffassen. Ist ζ ein beliebiges Element von $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$, so ist $\mathfrak{X}_i(\zeta)$ nach dem Schurschen Lemma ein skalares Vielfaches $\omega_i(\zeta) E$ der Identität E; $\omega_i(\zeta) \in \Xi$. Als Funktion von ζ stellt dann ω_i einen linearen Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ dar. Natürlich ist ω_i vollständig durch die Werte $\omega_i(K_\alpha)$ für $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ bestimmt. Diese kann man in bekannter Weise durch Berechnung der Spur von $\mathfrak{X}_i(K_\alpha)$ bestimmen. Ist G_α ein Element von $\mathfrak{K}_\alpha$, so wird es oft bequem sein, auch $\omega_i(G_\alpha)$ für $\omega_i(K_\alpha)$ zu schreiben; man hat dann

$$\omega_i(K_\alpha) = \omega_i(G_\alpha) = \frac{g}{n(G_\alpha)} \cdot \frac{\chi_i(G_\alpha)}{x_i}, \qquad \left(x_i = \chi_i(1)\right). \tag{2.3}$$

Da $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ orthogonal und daher linear unabhängig sind, sind die k linearen Charaktere $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ von $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ voneinander verschieden. Da

$Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ die Dimension k hat, sind dies sämtliche irreduziblen Darstellungen der Klassenalgebra. Man sieht auch jetzt noch leicht ein, daß $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ halbeinfach ist.

Jedes $\chi_i(G_\alpha)$ ist eine Summe von g-ten Einheitswurzeln. Ersetzt man also den Körper der komplexen Zahlen Ξ durch einen die g-ten Einheitswurzeln enthaltenden Teilkörper Ω, so zeigt (2.3), daß alle $\omega_i(K_\alpha)$ in Ω liegen. Daher besitzt auch $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ genau k verschiedene lineare Charaktere, die wir ebenfalls mit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ bezeichnen.

Im folgenden ist Ω stets ein die g-ten Einheitswurzeln enthaltender algebraischer Zahlkörper endlichen Grades. Wie in § 1 sei $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen algebraischen Zahlen in Ω, und es sei $\mathfrak{p}$ ein festes Primideal von $\mathfrak{o}$ und p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare rationale Primzahl. Die Restklasse eines Elements α von $\mathfrak{o}$ (mod $\mathfrak{p}$) wird stets mit α^* bezeichnet werden; es sei

$$\Omega^* = \mathfrak{o}/\mathfrak{p} \tag{2.4}$$

der Restklassenkörper. Ferner sei ν stets die zu $\mathfrak{p}$ gehörige exponentielle Bewertung von Ω, die wir so normieren, daß

$$\nu(p) = 1 \tag{2.5}$$

ist. Gelegentlich wird die Bezeichnung $\mathfrak{o}_\nu$ für den Ring der für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen von Ω und $\mathfrak{p}_\nu$ für das Primideal von $\mathfrak{o}_\nu$ verwendet werden. Der Restklassenkörper $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{p}_\nu$ darf mit Ω^* identifiziert werden.

Ist G ein Element von $\mathfrak{G}$, so schreiben wir zur Abkürzung $\nu(G)$ für $\nu\big(n(G)\big)$ und nennen diese Zahl den *Defekt* von G. Die p-Sylowgruppen des Normalisators $\mathfrak{N}(G)$ haben dann also die Ordnung $p^{\nu(G)}$. Gehört G_α zur Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$, so setzen wir noch

$$\nu(\mathfrak{K}_\alpha) = \nu(G_\alpha) = \nu\big(n(G_\alpha)\big), \qquad (G_\alpha \in \mathfrak{K}_\alpha); \tag{2.6}$$

wir nennen $\nu(\mathfrak{K}_\alpha)$ den *Defekt* der Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$.

Ein Element G von $\mathfrak{G}$ heiße *p-regulär*, wenn die Ordnung von G zu p teilerfremd ist. Da das gleiche dann auch für alle konjugierten Elemente gilt, so können wir von *p-regulären Klassen* konjugierter Elemente sprechen.

§ 3. Eigenschaften von modularen Charakteren

Wir geben in diesem Abschnitt eine Schilderung der Theorie der modularen Gruppendarstellungen, soweit sie im folgenden benötigt wird.

(3 A) *Es sei Γ eine Algebra von endlicher Dimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper Ξ von Primzahlcharakteristik p. Es sei S der von den Elementen $\alpha\beta - \beta\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma$ aufgespannte lineare Teilraum von Γ; es sei T die Menge der Elemente ϱ von Γ, für die es eine Potenz q von p gibt, derart daß ϱ^q zu S gehört. Dann ist T ein linearer Teilraum von Γ. Ferner ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen von Γ gleich der Dimension des Restklassenraumes Γ/T.*

Beweis. Es seien ϱ und σ zwei Elemente von Γ; man bilde $(\varrho+\sigma)^p$ durch Ausmultiplizieren der Klammern. Zu jedem von ϱ^p und σ^p verschiedenen Glied gehören p Glieder, die aus ihm durch zyklische Permutation der Faktoren entstehen. Offenbar sind diese p Glieder untereinander kongruent (mod S). Daher ergibt sich

$$(\varrho+\sigma)^p \equiv \varrho^p + \sigma^p \pmod{S}. \tag{3.1}$$

Sind α, β Elemente von Γ und setzt man $\gamma = \beta(\alpha\beta)^{p-1}$, so folgt unter Verwendung von (3.1), daß

$$(\alpha\beta - \beta\alpha)^p \equiv (\alpha\beta)^p - (\beta\alpha)^p = \alpha\gamma - \gamma\alpha \equiv 0 \pmod{S}$$

ist. Jetzt sieht man, daß die p-te Potenz jedes Elementes von S wieder zu S gehört. Unter Verwendung von (3.1) folgt nun leicht, daß die in (3A) definierte Menge T wirklich ein linearer Teilraum von Γ ist, und ferner daß $T \supseteq S$ ist.

Ist Γ einfach, also eine volle Matrizenalgebra über Ξ, so besteht S, wie man leicht sieht, gerade aus den Matrizen von der Spur Null. Ist η ein Idempotent mit von Null verschiedener Spur, so gehört η nicht zu S und auch nicht zu T. Da nun Γ/S die Dimension 1 hat und $\Gamma \supset T \supseteq S$ ist, so folgt hier, daß Γ/T die Dimension 1 hat.

Im allgemeinen Fall folgt aus der Nilpotenz des Radikals N von Γ, daß N zu T gehört. Besitzt nun Γ genau l wesentlich verschiedene irreduzible Darstellungen, so ist Γ/N direkte Summe von l Idealen Γ_i, die einfache Algebren sind. Hat T_i die entsprechende Bedeutung für Γ_i wie T für Γ, so folgt jetzt leicht, daß die Dimension von Γ/T gleich der Summe der Dimensionen der Γ_i/T_i ist. Nach dem oben Gesagten ist aber jede der letzteren Dimensionen 1, und daher hat Γ/T die Dimension l wie behauptet war.

(3B) *Die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper Ξ von Primzahlcharakteristik p ist gleich der Anzahl der p-regulären Klassen konjugierter Elemente in $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir nehmen $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$ und verwenden dieselben Bezeichnungen wie im Beweis von (3A). Ist G ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, so können wir $G = RP$ setzen, wo R und P Potenzen von G sind und wo R p-regulär ist, während die Ordnung von P eine Potenz q von p ist. Aus (3.1) mit $\varrho = RP$, $\sigma = -R$ ergibt sich

$$(RP - R)^p \equiv R^p P^p - R^p \pmod{S}.$$

Diese Beziehung erhebe man wieder in die p-te Potenz und beachte, daß wie oben bemerkt, die p-te Potenz eines Elementes von S wieder zu S gehört. Fährt man so fort, so findet man schließlich

$$(RP - R)^q \equiv R^q P^q - R^q = R^q - R^q = 0 \pmod{S}.$$

Dies heißt aber, daß $RP - R \in T$ ist, also $G \equiv R \pmod{T}$.

Jetzt folgt, daß (mod T) das allgemeine Element (1.1) von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$ einem Element derselben Form kongruent ist, in dem nur die p-regulären Elemente von $\mathfrak{G}$ von Null verschiedene Koeffizienten haben. Sind ferner G und G_1 zwei konjugierte Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist $G \equiv G_1 \pmod{S}$ und also auch (mod T). Daher kann man setzen

$$\alpha \equiv \sum_R a_R R \pmod{T}, \tag{3.2}$$

wo R ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen durchläuft. Diese Elemente R bilden ein (mod T) linear unabhängiges System von Elementen von Γ. Ist nämlich α in (3.2) ein Element von T, so gibt es eine Potenz q von p, derart daß $\alpha^q \in S$ ist. Da die Elemente R p-regulär sind, kann man q so wählen, daß für jedes R die Gleichung $R^q = R$ gilt. Erhebt man nun α in (3.2) in die q-te Potenz, so ergibt sich mit Hilfe von wiederholter Anwendung von (3.1), daß

$$\sum_R a_R^q R \equiv 0 \pmod{S}$$

ist. Nun sieht man aber leicht, daß S aus den Elementen (1.1) besteht, für die (mod p) für jede Klasse $\mathfrak{K}_i$ die Summe der Koeffizienten der Elemente G in $\mathfrak{K}_i$ verschwindet. Da alle R in (3.2) zu verschiedenen Klassen gehören, sind (mod p) alle a_R^q und daher alle a_R in (3.2) Null, wie zu zeigen war.

Es bilden also die Elemente R in (3.2) eine Basis für $\Gamma \pmod{T}$. Daher ist die Dimension l von Γ/T gleich der Anzahl der p-regulären Klassen $\mathfrak{K}_i$, und nun liefert (3A) die Behauptung.

Wir beweisen weiter den für uns wichtigen Hilfssatz

(3C) *Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_l$ die l p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$, und ist G_j ein Repräsentant für $\mathfrak{K}_j$, so kann man l (gewöhnliche) irreduzible Charaktere $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l$ von $\mathfrak{G}$ so auswählen, daß*

$$\operatorname{Det}\left(\chi_i(G_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{3.3}$$

ist, wobei in der Determinante der Zeilenindex i und der Spaltenindex j die Werte $1, 2, \ldots, l$ durchlaufen.

Beweis. Wäre (3C) nicht richtig, so könnte man l ganze Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_l$ in Ω so wählen, daß für jeden irreduziblen Charakter χ_i die Kongruenz gilt

$$\sum_{j=1}^{l} u_j \chi_i(G_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

und etwa $u_m \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Ist Θ eine beliebige Linearverbindung der χ_i mit ganzen Koeffizienten in Ω, so ist dann

$$\sum_{j=1}^{l} u_j \Theta(G_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{3.4}$$

Es sei nun $\mathfrak{B} = \{G_m\}$ die von G_m erzeugte zyklische Gruppe, b sei die Ordnung und $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_b$ seien die b irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{B}$. Dann wähle

man eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{N}(G_m)$ und setze $\mathfrak{E} = \{\mathfrak{B}, \mathfrak{Q}\} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{Q}$. Ist BQ mit $B \in \mathfrak{B}$, $Q \in \mathfrak{Q}$ ein variables Element von $\mathfrak{E}$, so ist ein Charakter ϑ_i von $\mathfrak{E}$ durch

$$\vartheta_i(BQ) = \zeta_i(B)$$

definiert. Es sei Θ_i der von ϑ_i induzierte Charakter von $\mathfrak{G}$. Setzt man

$$\Theta = \sum_{i=1}^{b} \overline{\zeta_i(G_m)}\, \Theta_i,$$

so ist Θ eine Linearverbindung von Charakteren von $\mathfrak{G}$ mit ganzen Koeffizienten aus Ω. Aus der Definition der induzierten Charaktere ergibt sich

$$\Theta(G_j) = \frac{1}{(\mathfrak{E}:1)} \sum_{X \in \mathfrak{G}} \sum_{i=1}^{b} \overline{\zeta_i(G_m)}\, \vartheta_i(X G_j X^{-1}),$$

wo $\vartheta_i(X G_j X^{-1})$ gleich Null zu setzen ist, falls $X G_j X^{-1}$ nicht zu $\mathfrak{E}$ gehört. Ist $X G_j X^{-1} \in \mathfrak{E}$ und $1 \leq j \leq l$, so ist $X G_j X^{-1}$ p-regulär und also ein Element B von $\mathfrak{B}$. Dann ist $\vartheta_i(X G_j X^{-1}) = \zeta_i(B)$. Aus den Orthogonalitätsrelationen für die Charaktere von $\mathfrak{B}$ ergibt sich jetzt, daß der Wert der inneren Summe in der letzten Formel 0 oder b ist, je nachdem ob $B \neq G_m$ oder $B = G_m$ ist. Das letztere ist nur für $G_j = G_m$, d.h. für $j = m$ möglich. Jetzt folgt leicht, daß $\Theta(G_j) = 0$ für $j \neq m$ und $\Theta(G_m) = b(\mathfrak{N}(G_m) : \mathfrak{E})$ ist. Wegen der Art, in der wir $\mathfrak{E}$ konstruierten, ist dieser Wert $\Theta(G_m)$ eine zu p teilerfremde ganze Zahl. Setzen wir dies in (3.4) ein, so erhalten wir einen Widerspruch, da $u_m \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ war. Damit ist (3C) bewiesen.

Da der Körper Ω nach Voraussetzung die g-ten Einheitswurzeln enthält, kann man die irreduzible Darstellung $\mathfrak{X}_i$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Charakter χ_i in Ω schreiben, $i = 1, 2, \ldots, k$[5]). Ebenso kann man die Koeffizienten der l absolut irreduziblen modularen Darstellungen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$ von $\mathfrak{G}$ im Restklassenkörper Ω^* wählen. Ist $\mathfrak{o}_\nu$ der Ring der für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen in Ω, so darf man ferner annehmen, daß $\mathfrak{X}_i(G)$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$ Koeffizienten in $\mathfrak{o}_\nu$ hat[6]). Die Restklassenabbildung führt dann $\mathfrak{X}_i$ in eine Darstellung $\mathfrak{X}_i^*$ mit Koeffizienten in $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{p}_\nu = \Omega^*$ über. Tritt die irreduzible modulare Darstellung $\mathfrak{F}_j$ in $\mathfrak{X}_i$ mit der Vielfachheit d_{ij} auf, so nennen wir die nicht-negativen ganzen rationalen Zahlen d_{ij} die *Zerlegungszahlen* von $\mathfrak{G}$; $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$.

Wir definieren jetzt den Charakter φ einer modularen Darstellung $\mathfrak{F}$ mit Koeffizienten in Ω^*. Dabei beschränken wir uns auf p-reguläre Elemente G von $\mathfrak{G}$. Hat G die Ordnung h, so sind die charakteristischen Wurzeln $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots$ von $\mathfrak{F}(G)$ sämtlich h-te Einheitswurzeln. Da h zu p teilerfremd ist, geht

---

[5]) Vgl. etwa R. Brauer, Amer. J. Math. **69**, 709 (1947). Ersetzt man gegebenfalls Ω durch einen Erweiterungskörper endlichen Grades, so kann man die Verwendung dieser Tatsache vermeiden.

[6]) Vgl. § 14, (d) und (14B). Dort wird auch gezeigt, daß die im folgenden definierten Zahlen d_{ij} ungeändert bleiben, wenn man $\mathfrak{X}_i$ durch eine ähnliche Darstellung mit Koeffizienten in $\mathfrak{o}_\nu$ ersetzt.

jedes ε_i^* aus einer eindeutig bestimmten h-ten Einheitswurzel ε_i in Ω durch Restklassenabbildung hervor. Dann setzen wir $\varphi(G) = \sum \varepsilon_i$. Es ist also φ eine für p-reguläre Elemente $G \in \mathfrak{G}$ definierte Funktion mit Werten in Ω. Natürlich hängt $\varphi(G)$ nur von der Klasse konjugierter Elemente $\mathfrak{K}_\alpha$ ab, zu der G gehört.

(3D) *Haben die irreduziblen modularen Darstellungen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$ die Charaktere $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, sind d_{ij} die Zerlegungszahlen, so ist für p-reguläre Elemente G*

$$\chi_i(G) = \sum_{j=1}^{l} d_{ij} \varphi_j(G). \tag{3.5}$$

In der Tat stimmt für p-reguläres G der Wert des Charakters von $\mathfrak{X}_i^*$ mit dem Wert $\chi_i(G)$ des Charakters χ_i von $\mathfrak{X}_i$ überein, und da $\mathfrak{F}_j$ genau d_{ij}-mal in $\mathfrak{X}_i^*$ auftritt, so erhält man sofort (3.5).

Setzt man die Werte (3.5) in (3.3) ein, so erhält man

(3E) *Die aus den Werten der l irreduziblen modularen Charaktere φ_i für die Repräsentanten $G_1, G_2, \ldots, G_l$ der l p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$ gebildete Determinante ist nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar;*

$$\operatorname{Det}(\varphi_i(G_j)) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{3.6}$$

Sind ferner $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_l$ wie in (3C) *gewählt, so ist*

$$\operatorname{Det}(d_{ij}) \not\equiv 0 \pmod{p}; \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l). \tag{3.7}$$

Wir setzen noch

$$c_{ij} = \sum_{\varrho=1}^{k} d_{\varrho i} d_{\varrho j} = c_{ji}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l); \tag{3.8}$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{k} d_{ji} \chi_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, l). \tag{3.9}$$

Die c_{ij} sind nicht-negative ganze rationale Zahlen, die sog. *Cartanschen Invarianten* von $\mathfrak{G}$ (oder eigentlich von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$). Es erübrigt sich hier, ihre algebrentheoretische Bedeutung zu diskutieren. Die Φ_i sind gewöhnliche Charaktere von $\mathfrak{G}$, die in der modularen Theorie eine besondere Rolle spielen, worauf wir ebenfalls nicht näher einzugehen brauchen. Aus (3.9) und (3.5) ergibt sich unter Verwendung von (3.8) die Beziehung

$$\Phi_i(G) = \sum_{j=1}^{l} c_{ij} \varphi_j(G) \qquad (G \ p\text{-regulär}). \tag{3.10}$$

Die Orthogonalitätsbeziehungen für die Charaktere von $\mathfrak{G}$ besagen, daß

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i(G)}\, \chi_i(H) = n(G) \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem ob die Elemente G und H von $\mathfrak{G}$ konjugiert sind oder nicht. Wählt man für H eins der p-regulären Elemente $G_1, G_2, \ldots, G_l$, sagen wir

$H = G_\alpha$, und drückt man $\chi_i(G_\alpha)$ nach (3.5) durch $\varphi_j(G_\alpha)$ aus, so folgt mit Hilfe von (3.9), daß

$$\sum_{j=1}^{l} \overline{\Phi_j(G)}\, \varphi_j(G_\alpha) = n(G) \quad \text{oder} \quad = 0 \tag{3.11}$$

ist, je nachdem ob G und G_α konjugiert sind oder nicht. Für p-singuläres G tritt der zweite Fall ein. Aus dem Nichtverschwinden der Determinante (3.6) ergibt sich dann, daß $\Phi_j(G) = 0$ sein muß. Für p-reguläres G folgt ebenso aus (3.6), daß $\overline{\Phi_j(G)}$ durch die höchste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, die in $n(G)$ aufgeht. Wegen $\overline{\Phi_j(G)} = \Phi_j(G^{-1})$, $n(G) = n(G^{-1})$ haben wir

(3 F) *Die in* (3.9) *definierten Charaktere* Φ_j *verschwinden für alle* p*-singulären Elemente. Für* p*-reguläres* G *ist* $\nu\big(\Phi_j(G)\big) \geqq \nu(G)$.

Ist G p-regulär, so kann man $\Phi_j(G)$ in (3.11) nach (3.10) durch $\varphi_i(G)$ ausdrücken. Schreibt man für G_α wieder H, so erhält man

(3 G) *Für* p*-reguläre Elemente* G *und* H *von* $\mathfrak{G}$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{l} \overline{\Phi_j(G)}\, \varphi_j(H) = \sum_{i,j=1}^{l} c_{ij}\, \overline{\varphi_i(G)}\, \varphi_j(H) = n(G) \quad \text{oder} \quad 0, \tag{3.12}$$

je nachdem ob G *und* H *konjugiert sind oder nicht.*

§ 4. Blöcke von Charakteren

Wir schicken unserer Untersuchung einige Bemerkungen über die Klassenalgebra $Z = Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ voraus. Wie bereits in § 2 bemerkt wurde, besitzt Z die k verschiedenen linearen Charaktere $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ und da Z die Dimension k hat, sind dies die sämtlichen irreduziblen Darstellungen von Z.

Offenbar ist der Durchschnitt $J \cap Z = J_0$ eine Ordnung von Z, die die $\mathfrak{o}$-Basis $K_1, K_2, \ldots, K_k$ besitzt; der Restklassenring $J_0/\mathfrak{p} J_0$ darf mit $Z^* = Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ identifiziert werden. Anwendung der Restklassenabbildung auf $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ liefert dann k lineare Charaktere $\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots, \omega_k^*$ von Z^*, die aber im allgemeinen nicht alle verschieden sind. Jeder Homomorphismus ψ der Algebra Z^* über Ω^* auf einen Erweiterungskörper von Ω^* ist ein linearer Charakter von Z^* und stimmt mit einem der ω_i^* überein[7]).

Wie in (1.3) betrachten wir die Zerlegung der modularen Gruppenalgebra $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ in direkt unzerlegbare Ideale

$$\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*) = \mathfrak{A}_1^* \oplus \mathfrak{A}_2^* \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_t^*. \tag{4.1}$$

Setzt man dementsprechend

$$1 = \eta_1^* + \eta_2^* + \cdots + \eta_t^*, \qquad (\eta_\tau^* \in \mathfrak{A}_\tau^*), \tag{4.2}$$

so sind die η_τ^* orthogonale Idempotente des Zentrums $Z^* = Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$. Das Ideal $\eta_\tau^* Z^*$ von Z^* ist direkt unzerlegbar und man hat

$$Z^* = \eta_1^* Z^* \oplus \eta_2^* Z^* \oplus \cdots \oplus \eta_t^* Z^*.$$

[7]) Vgl. § 14; (14 A) und (14 C).

Als kommutative direkt unzerlegbare Algebra ist $\eta_\tau^* Z^*$ primär. Ist also $\mathfrak{B}_\tau^*$ das Radikal von $\eta_\tau^* Z^*$, so ist $\eta_\tau^* Z^*/\mathfrak{B}_\tau$ ein Körper, der als Erweiterungskörper Ω_τ^* von Ω^* betrachtet werden kann. Man erweitere den natürlichen Homomorphismus von $\eta_\tau^* Z^*$ auf Ω_τ^* zu einem Homomorphismus ψ_τ von Z^* auf Ω_τ^*, indem man $\psi_\tau(\xi) = 0$ für $\xi \in \eta_\sigma^* Z^*$ mit $\sigma \neq \tau$ vorschreibt. Nach dem oben Gesagten erhält man so einen linearen Charakter ψ_τ von Z^*; jeder lineare Charakter von Z^* stimmt mit einem dieser ψ_τ überein. Man hat $\psi_\tau(\eta_\tau^*) = 1$.

Wie in § 1 sei $\mathfrak{B}_\tau^*$ die Summe der $\mathfrak{A}_\sigma^*$ mit $\sigma \neq \tau$. Da die Ideale $\mathfrak{B}_\tau^*$ von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ die Bilder der Ideale $\mathfrak{B}_\tau$ von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega)$ in (1.4) sind, so haben wir das Resultat

(4A) *Hat das Ideal $\mathfrak{p}J$ in J die Blockideale $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_t$ und bildet der natürliche Homomorphismus von J auf $J/\mathfrak{p}J = \Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ das Ideal $\mathfrak{B}_\tau$ auf das Ideal $\mathfrak{B}_\tau^*$ von $\Gamma(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ ab, so gibt es lineare Charaktere ψ_τ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, derart daß $\psi_\tau(\eta_\tau^*) = 1$ ist; $\tau = 1, 2, \ldots, t$. Die linearen Charaktere $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t$ sind die sämtlichen linearen Charaktere der Algebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$.*

Ist wie immer $\mathfrak{p}$ ein festes Primideal von Ω, so ordnen wir jedem Blockideal $\mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{p}J$ einen „*Block*" B_τ zu. Darunter werden wir eine gewisse Menge von gewöhnlichen und modularen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ verstehen. An Stelle von Darstellungen werden wir auch von den zu B_τ gehörigen gewöhnlichen und modularen Charakteren von $\mathfrak{G}$ sprechen. Den linearen Charakter ψ_τ von Z in (4A) nennen wir *den dem Block B_τ zugeordneten linearen Charakter der modularen Klassenalgebra $Z^* = Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$.*

Wir rechnen eine gewöhnliche irreduzible Darstellung $\mathfrak{X}_i$ von $\mathfrak{G}$ und ihren Charakter χ_i zum Block B_τ, wenn für den χ_i nach (2.3) entsprechenden linearen Charakter ω_i von Z die Gleichung gilt

$$\omega_i^* = \psi_\tau. \tag{4.3}$$

Aus dem oben Gesagten ergibt sich

(4B) *Jeder irreduzible Charakter χ_i von $\mathfrak{G}$ gehört zu einem und nur einem Block B_τ und jeder Block enthält Charaktere χ_i. Zwei Charaktere χ_i und χ_j gehören dann und nur dann zum selben Block, wenn für alle $G \in \mathfrak{G}$ die Kongruenz gilt*

$$\omega_i(G) \equiv \omega_j(G) \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{4.4}$$

Wir zählen eine modulare irreduzible Darstellung $\mathfrak{F}_j$ und ihren Charakter φ_j zum Block B_τ, wenn der Kern $\mathfrak{P}_j^*$ von $\mathfrak{F}_j$ das Ideal $\mathfrak{B}_\tau^*$ enthält.

(4C) *Jede irreduzible modulare Darstellung $\mathfrak{F}_j$ gehört zu einem und nur einem Block B_τ und jeder Block B_τ enthält derartige $\mathfrak{F}_j$. Gehört die gewöhnliche irreduzible Darstellung $\mathfrak{X}_i$ zu B_τ, so gehören alle in $\mathfrak{X}_i^*$ als Bestandteil auftretenden $\mathfrak{F}_j$ zu B_τ.*

Beweis. Der erste Teil von (4C) ergibt sich unmittelbar aus dem in § 1 Gesagten. Gehört $\mathfrak{X}_i$ zu B_τ, so gilt (4.3). Wegen $\psi_\tau(\eta_\tau^*) = 1$ ist $\omega_i^*(\eta_\tau^*) = 1$. Als Element von Z^* hat η_τ^* die Form $\sum b_\lambda^* K_\lambda$ mit $b_\lambda^* \in \Omega^*$. Wählt man b_λ

in $\mathfrak{o}$ derart daß die Restklassenabbildung von $\mathfrak{o}$ auf Ω^* gerade b_λ in b_λ^* überführt und setzt man $\eta_\tau = \sum b_\lambda K_\lambda$, so ist η_τ ein Element von $J_0 = Z \cap J$, das durch die Restklassenabbildung von J gerade in η_τ^* übergeht. Dann ist $\mathfrak{X}_i(\eta_\tau) = \omega_i(\eta_\tau) E$, also $\mathfrak{X}_i^*(\eta_\tau^*) = \omega_i^*(\eta_\tau^*) E^* = E^*$. Tritt nun $\mathfrak{F}_j$ als Bestandteil in $\mathfrak{X}_i^*$ auf, so ist $\mathfrak{F}_j(\eta_\tau^*) = E^*$. Also ist $\eta_\tau^* \in \mathfrak{P}_j^*$ und daher ist $\mathfrak{B}_\sigma$ für $\sigma \neq \tau$ nicht in $\mathfrak{P}_j$ enthalten. Dann muß $\mathfrak{B}_\tau \subseteq \mathfrak{P}_j$ sein, und daher gehört $\mathfrak{F}_j$ zum Block B_τ, wie zu zeigen war.

Aus (4C) ersieht man, daß die Zerlegungszahl d_{ij} verschwinden muß, wenn $\mathfrak{X}_i$ und $\mathfrak{F}_j$ zu verschiedenen Blöcken gehören. Daraus folgt unter Verwendung von (3.8), daß $c_{ij} = 0$ ist, wenn $\mathfrak{F}_i$ und $\mathfrak{F}_j$ zu verschiedenen Blöcken gehören. Dies Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen

(4D) *Bildet man aus den Zerlegungszahlen d_{ij} und den Cartanschen Invarianten c_{ij} Matrizen D und C, so sind bei geeigneter Anordnung der Indizes diese Matrizen direkte Summen von den den einzelnen Blöcken B_τ entsprechenden Teilmatrizen D_τ bzw. C_τ.*

Besteht B_τ aus k_τ gewöhnlichen Darstellungen $\mathfrak{X}_i$ und aus l_τ modularen Darstellungen $\mathfrak{F}_j$, so hat D_τ gerade k_τ Zeilen und l_τ Spalten. Die Matrix C_τ ist quadratisch vom Grade l_τ. Aus (3.8) ergibt sich

$$C_\tau = D_\tau' D_\tau, \tag{4.5}$$

wo D_τ' die Transponierte von D_τ ist.

Beschränkt man sich ausschließlich auf die Betrachtung der gewöhnlichen Darstellungen, so hängt die Verteilung auf Blöcke allein von der rationalen Primzahl p und nicht von dem Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von p ab. Beim Beweis dieser Behauptung darf man annehmen, daß Ω normal über dem Körper Q der rationalen Zahlen ist. Jeder Primidealteiler $\mathfrak{p}'$ von p in Ω geht aus dem festen Primideal $\mathfrak{p}$ durch Anwendung eines Elements T der Galoisschen Gruppe von Ω über Q hervor. Ist nun ε eine primitive g-te Einheitswurzel, so führt T dann ε in eine Potenz ε^s mit einem zu g teilerfremden Exponenten s über. Da $\chi_i(G)$ eine Summe von g-ten Einheitswurzeln ist, wird $\chi_i(G)$ in $\chi_i(G^s)$ transformiert, also $\omega_i(G)$ in $\omega_i(G^s)$. Wendet man T auf (4.4) an und ersetzt G^s durch G, so sieht man, daß (4.4) für $\mathfrak{p}'$ an Stelle von $\mathfrak{p}$ gilt. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Kennt man die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere χ_i von $\mathfrak{G}$, so kann man für jedes Primideal sofort die Anzahl t der Blöcke B_τ bestimmen, d.h. also feststellen, wieviel Blockideale $\mathfrak{B}_\tau$ in der Zerlegung (1.4) von $\mathfrak{p}J$ auftreten. Die Anzahl der in $\mathfrak{B}_\tau$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{P}_j$ von J ist die Anzahl l_τ der modularen Darstellungen $\mathfrak{F}_j$ in B_τ. Sind die modularen Charaktere φ_j bekannt, so kann man leicht l_τ bestimmen. Die unten beim Beweis von (5A) verwendete Methode zeigt, daß man l_τ auch finden kann wenn man nur die χ_i kennt. Da unter unseren Voraussetzungen der Restklassenring $J/\mathfrak{P}_j$ ein voller Matrizenring über Ω^* ist, ist seine Struktur durch seine Gradzahl f_j bestimmt. Es ist aber f_j der Grad der zu $\mathfrak{P}_j$ gehörigen modularen Darstellung $\mathfrak{F}_j$, also $f_j = \varphi_j(1)$. Da sich die Cartanschen Invarianten c_{ij} aus

den modularen Charakteren berechnen lassen[8]), so erhält man auch gewisse Information bezüglich des Restklassenrings $J/\mathfrak{B}_\tau$. Kennt man die modularen Charaktere φ_j, so kann man auch ein System von Kongruenzen für die Koeffizienten a_G des Elements α in (1.1) aufstellen, die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen darstellen, daß α zu dem Primideal $\mathfrak{P}_j$ gehört. Es sei $\varphi_i^*(G)$ die Spur von $\mathfrak{F}_i(G)$ für $G \in \mathfrak{G}$. Setzt man wie gelegentlich in § 3 $G = RP$, wo R und P Potenzen von G sind, und wo R p-regulär ist, während die Ordnung von P eine Potenz von p ist, so sieht man leicht, daß $\varphi_i^*(G) = \varphi_i^*(R)$ ist, und daß $\varphi_i^*(R)$ aus dem Werte $\varphi_i(R)$ des Charakters φ_i von $\mathfrak{F}_i$ für das p-reguläre Element R durch Restklassenabbildung hervorgeht. Dann gilt

(4E) *Das zur irreduziblen modularen Darstellung $\mathfrak{F}_i$ von $\mathfrak{G}$ gehörige Primideal $\mathfrak{P}_i$ von J besteht aus denjenigen Elementen $\alpha = \sum a_G G$ von J, $a_G \in \mathfrak{o}$, für die die Gleichungen*

$$\sum_G a_G^* \varphi_i^*(GH) = 0 \tag{4.6}$$

für alle $H \in \mathfrak{G}$ gelten. Hier bezeichnet a_G^* das aus $a_G \in \mathfrak{o}$ durch Restklassenabbildung (mod $\mathfrak{p}$) *erhaltene Element von $\Omega^* = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$.*

Beweis. Man sieht leicht, daß die Elemente $\alpha \in J$, für die Gln. (4.6) gelten, ein Ideal $\mathfrak{M}$ von J bilden; $\mathfrak{P}_i \subseteqq \mathfrak{M} \subseteqq J$. Daher ist entweder $J = \mathfrak{M}$ oder $J = \mathfrak{P}_i$. Wäre $J = \mathfrak{M}$, so müßte die Spur von $\mathfrak{F}_i(\alpha^*)$ für alle $\alpha^* \in J^*$ verschwinden, was nicht der Fall ist. Daher ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_i$, wie behauptet war.

Der Beweis gilt auch dann noch, wenn Ω ein beliebiger algebraischer Zahlkörper ist, also nicht notwendig die g-ten Einheitswurzeln enthält. In der Tat ist dann Ω^* ein endlicher Körper, also vollkommen, und daher enthält J^* Elemente α^*, denen in der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{F}_i$ von J^* lineare Transformationen $\mathfrak{F}_i(\alpha^*)$ mit von Null verschiedener Spur entsprechen.

§ 5. Zuordnung von p-regulären Klassen zu den Blöcken

Enthält der Block B_τ wie zuvor l_τ modulare Charaktere und ist l die Anzahl der p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$, so ist nach (3B)

$$l = l_1 + l_2 + \cdots + l_t. \tag{5.1}$$

Wir wollen jetzt die l p-regulären Klassen so den Blöcken B_τ zuordnen, daß dem Block B_τ gerade l_τ Klassen entsprechen, $\tau = 1, 2, \ldots, t$. Dabei wählen wir die Bezeichnungen so, daß dieselben Indizes j bei den $\varphi_j \in B_\tau$ und bei den B_τ zugeordneten Klassen auftreten. Genauer wollen wir zeigen

---

[8]) Sieht man die Zahlen $n(G)$ für p-reguläres G als bekannt an, so sieht man dies aus (3.12) und (3.6). Deutlicher noch ergibt sich diese Behauptung aus den Formeln $\gamma_{ij}\, g = \sum_R \overline{\varphi_i(R)}\, \varphi_j(R)$, wo R über alle p-regulären Elemente läuft und wo (γ_{ij}) die zu $C = (c_{ij})$ inverse Matrix C^{-1} bezeichnet. Für den Beweis der Formeln sei auf die in [3]) zitierten Arbeiten verwiesen.

(5A) *Es sei S_τ die Menge der l_τ Indizes j, für die φ_j zu B_τ gehört, $\tau = 1, 2, \ldots, t$. Man kann die gewöhnlichen Charaktere χ_i von $\mathfrak{G}$ und die Klassen $\mathfrak{K}_i$ so numerieren, daß alle Klassen $\mathfrak{K}_i$ mit $i \in S_\tau$ p-regulär sind, daß die Charaktere χ_i mit $i \in S_\tau$ zu B_τ gehören und daß für jedes τ die folgenden Beziehungen gelten*

$$\left.\begin{aligned} &\text{(5.2)} && \operatorname{Det}\left(\chi_i(G_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \\ &\text{(5.3)} && \operatorname{Det}\left(\varphi_i(G_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \\ &\text{(5.4)} && \operatorname{Det}\left(d_{ij}\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \end{aligned}\right\} \quad (i, j \in S_\tau),$$

wobei in allen drei Determinanten der Zeilenindex i und der Spaltenindex j über die l_τ Werte in S_τ laufen.

Beweis. Nach (3C) kann man l Charaktere χ_i so auswählen, daß

$$\text{(5.5)} \qquad \Delta = \operatorname{Det}\left(\chi_i(G_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, wobei hier i und j die Werte $1, 2, \ldots, l$ durchlaufen und $G_1, G_2, \ldots, G_l$ Vertreter für die l p-regulären Klassen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_l$ sind. Entwickelt man Δ nach dem Laplaceschen Satz, so kann man Δ in der Form schreiben

$$\Delta = \sum_{\varrho} \pm \Delta_1^{(\varrho)} \Delta_2^{(\varrho)} \ldots \Delta_t^{(\varrho)},$$

wobei $\Delta_\tau^{(\varrho)}$ eine Unterdeterminante ist, in der die zu B_τ gehörigen unter den Charakteren χ_i auftreten. Es gebe etwa m_τ derartige Charaktere. Ist $m_\tau = 0$, so ist $\Delta_\tau^{(\varrho)} = 1$ zu setzen. Da in Δ gerade l Charaktere χ_i auftreten, hat man

$$\text{(5.6)} \qquad l = m_1 + m_2 + \cdots + m_t.$$

Wegen (5.5) kann man ein Glied $\Delta_1^{(\varrho)} \Delta_2^{(\varrho)} \ldots \Delta_t^{(\varrho)}$ so auswählen, daß

$$\text{(5.7)} \qquad \Delta_1^{(\varrho)} \Delta_2^{(\varrho)} \ldots \Delta_t^{(\varrho)} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Drückt man die in $\Delta_\tau^{(\varrho)}$ auftretenden Charaktere nach (3.5) durch modulare Charaktere φ_j aus, so treten nur modulare Charaktere $\varphi_j \in B_\tau$ auf, vgl. (4D). Wäre nun der Grad m_τ von $\Delta_\tau^{(\varrho)}$ größer als die Anzahl l_τ der modularen Charaktere in B_τ, so würde $\Delta_\tau^{(\varrho)}$ verschwinden, was im Widerspruch zu (5.7) steht. Daher ist $m_\tau \leqq l_\tau$ für jedes τ. Vergleich von (5.1) und (5.6) zeigt jetzt, daß $m_\tau = l_\tau$ ist, $\tau = 1, 2, \ldots, t$.

Ändert man jetzt die Numerierung der Charaktere χ_i und der Klassen $\mathfrak{K}_j$ so ab, daß für jedes τ in der Determinante $\Delta_\tau^{(\varrho)}$ gerade die l_τ Charaktere χ_i mit $i \in S_\tau$ und die l_τ Klassen $\mathfrak{K}_j$ mit $j \in S_\tau$ auftreten, so folgt (5.2) aus (5.7). Drückt man wie oben die χ_i in dieser Determinante durch die φ_i aus, so sieht man, daß die Determinante in (5.2) das Produkt der Determinanten in (5.3) und (5.4) ist. Daher sind auch diese beiden Determinanten nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Da die d_{ij} ganze rationale Zahlen sind, kann man in (5.4) den Modul $\mathfrak{p}$ durch p ersetzen, und damit ist (5A) bewiesen. Die Bedingungen von (5A) können im allgemeinen auf mehrere Weisen erfüllt werden.

Nach (3.12) ist

$$\sum_{i,j} c_{\alpha\beta}\, \varphi_i(\overline{G_\alpha})\, \varphi_j(G_\beta) = n(G_\alpha)\, \delta_{\alpha\beta},$$

wobei $\delta_{\alpha\beta} = 0$ oder 1 zu setzen ist, je nachdem ob $\alpha \neq \beta$ oder $\alpha = \beta$ ist; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, l$. Ist φ die Matrix $(\varphi_i(G_j))$, C die Matrix (c_{ij}) und N die Matrix $(n(G_i)\,\delta_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \ldots, l)$, so kann man die Gleichung folgendermaßen in Matrizenform schreiben

$$\overline{\varphi}'\, C\, \varphi = N. \tag{5.8}$$

Arbeitet man im Ring $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ der für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen von Ω, so ist die Determinante von φ nach (3.6) eine Einheit. Daher zeigt (5.8), daß die Elementarteiler von C die in $n(G_1), n(G_2), \ldots, n(G_l)$ auftretenden Potenzen einer lokalen Primzahl von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ sind. Statt dessen kann man dann auch die Potenzen

$$\mathfrak{p}^{\nu(G_1)}, \mathfrak{p}^{\nu(G_2)}, \ldots, \mathfrak{p}^{\nu(G_l)} \tag{5.9}$$

nehmen. Da C ganze rationale Koeffizienten hat, sind dies auch die Elementarteiler von C im Ring I_p der für p ganzen, rationalen Zahlen. Tatsächlich ist die Determinante von C eine Potenz von p[9]), und daher sind die Zahlen (5.9) die Elementarteiler von C im Ring der ganzen rationalen Zahlen. Es wird aber im folgenden genügen, im Ring I_p zu operieren. Wir zeigen

(5B) *Die Elementarteiler der zum Block B_τ gehörigen Teilmatrix C_τ von C sind die Zahlen $\mathfrak{p}^{\nu(G_j)}$ mit $j \in S_\tau$.*

Beweis. Hat C_τ die Elementarteiler $e_1, e_2, \ldots, e_{l_\tau}$, so zeigen wir zunächst, daß bei geeigneter Anordnung der j in S_τ die Ungleichungen $e_j \geqq p^{\nu(G_j)}$ gelten. Wir können die e_j als Potenzen von p wählen und setzen dementsprechend $e_j = p^{\varepsilon_j}$. Ist H_τ eine Diagonalmatrix, die in der Hauptdiagonale die Elementarteiler e_j enthält, so gibt es zwei in I_p unimodulare Matrizen $U = (u_{ij})$ und $V = (v_{ij})$, $(i, j \in S_\tau)$, vom Grade l_τ derart, daß

$$U\, C_\tau\, V^{-1} = H_\tau \tag{5.10}$$

ist.

Nach (3.10) und (4D) haben wir für p-reguläres G

$$\Phi_i(G) = \sum_{j \in S_\tau} c_{ij}\, \varphi_j(G); \qquad (i \in S_\tau). \tag{5.11}$$

Man setze

$$\tilde{\Phi}_i(G) = \sum_{j \in S_\tau} u_{ij}\, \Phi_j(G); \qquad \tilde{\varphi}_i(G) = \sum_{j \in S_\tau} v_{ij}\, \varphi_j(G); \qquad (i \in S_\tau). \tag{5.12}$$

Wegen (5.10) nimmt dann (5.11) die Form an

$$\tilde{\Phi}_j(G) = e_j\, \tilde{\varphi}_j(G) = p^{\varepsilon_j} \tilde{\varphi}_j(G), \qquad (j \in S_\tau).$$

[9]) Vgl. R. BRAUER, Ann. of Math. **42**, 53—61 (1941) oder Ann. of Math. **57**, 357—377 (1953), Satz 13.

Jetzt zeigt (3F), daß für alle p-regulären G und für alle $j \in S_\tau$ die Ungleichungen gelten

$$\nu\big(\tilde{\varphi}_j(G)\big) \geqq \nu(G) - \varepsilon_j. \tag{5.13}$$

Aus (5.12) erhält man

$$\mathrm{Det}\,\big(\tilde{\varphi}_i(G_j)\big) = \mathrm{Det}\,(v_{ij})\,\mathrm{Det}\,\big(\varphi_i(G_j)\big); \qquad (i,j \in S_\tau).$$

Da V unimodular ist, ist $\mathrm{Det}\,(v_{ij})$ eine Einheit von I_p. Aus (5.3) folgt daher, daß die Determinante auf der linken Seite eine Einheit von $\mathfrak{o}_\nu$ ist. Nimmt man also die l_τ Elemente G_j mit $j \in S_\tau$ in geeigneter Anordnung, so darf man annehmen, daß

$$\nu\Big(\prod_{j \in S_\tau} \tilde{\varphi}_j(G_j)\Big) = 0$$

ist. Dann ist $\nu\big(\tilde{\varphi}_j(G_j)\big) = 0$, und jetzt zeigt (5.13), daß $\varepsilon_j \geqq \nu(G_j)$ ist, wie wir es zeigen wollten. Diese Ungleichungen gelten für jeden Block B_τ. Da C die direkte Summe der Matrizen C_τ ist, ist die Menge der Elementarteiler von C die Vereinigungsmenge der Mengen der Elementarteiler der C_τ. Würde auch nur in einem einzigen Fall in $\varepsilon_j \geqq \nu(G_j)$ das Ungleichheitszeichen gelten, so könnten wir nicht in (5.9) die Elementarteiler von C haben. Also gilt stets $\varepsilon_j = \nu(G_j)$ und damit ist (5B) vollständig bewiesen.

Unsere Methode liefert auch noch den Hilfssatz

(5C) *Ist p^m der größte Elementarteiler von C_τ, so gelten für alle $\varphi_i \in B_\tau$, alle $\chi_i \in B_\tau$ und alle p-regulären Elemente G von $\mathfrak{G}$ die Beziehungen*

$$\nu\big(\varphi_i(G)\big) \geqq \nu(G) - m; \qquad \nu\big(\chi_i(G)\big) \geqq \nu(G) - m. \tag{5.14}$$

In der Tat folgt aus (5.13), daß $\nu\big(\tilde{\varphi}_j(G)\big) \geqq \nu(G) - m$ ist, $j \in S_\tau$. Da V unimodular war, kann man nach den zweiten Gln. (5.12) φ_i als Linearverbindung der $\tilde{\varphi}_j$ mit Koeffizienten in $\mathfrak{o}_\nu$ darstellen. Daraus folgt die erste Behauptung (5.14). Die zweite Behauptung folgt aus der ersten unter Beachtung von (3.5) und (4D).

§ 6. Der Defekt eines Blockes

Es sei jetzt p^a die höchste in g aufgehende Potenz der Primzahl p, also in unseren Bezeichnungen $a = \nu(g)$. Wir definieren den Defekt d eines Blockes B_τ als die kleinste ganze rationale Zahl d, für die die Grade x_i aller Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ durch p^{a-d} teilbar sind. Man kann dann also $x_i = p^{a-d} x_i'$ mit ganzem rationalem x_i' setzen; es gibt $\chi_i \in B_\tau$, für die x_i' zu p teilerfremd ist.

Wir haben bei der Definition des Defekts die gewöhnlichen Charaktere von B_τ verwendet. Wir hätten ebensogut die modularen Charaktere nehmen können. In der Tat gilt

(6A) *Hat B_τ den Defekt d, so sind die Grade f_i aller modularen irreduziblen Charaktere φ_i in B_τ sämtlich durch p^{a-d}, aber nicht alle durch p^{a-d+1} teilbar.*

Beweis. Man bestimme die ganze rationale Zahl δ so, daß die Grade f_i der $\varphi_i \in B_\tau$ alle durch $p^{a-\delta}$, aber nicht alle durch $p^{a-\delta+1}$ teilbar sind. Aus

(3.5) ergibt sich für $G=1$ unter Berücksichtigung von (4D), daß $p^{a-\delta}$ ein Teiler von p^{a-d} ist. Andererseits folgt aus (5.4) und (3.5), daß für p-reguläre Elemente die $\varphi_i \in B_\tau$ als Linearverbindungen von l_τ geeigneten Charakteren χ_i aus B_τ mit rationalen, für p ganzen, Koeffizienten darstellen kann. Für $G=1$ zeigt dies, daß p^{a-d} ein Teiler von $p^{a-\delta}$ ist. Daher muß $d=\delta$ sein, wie behauptet war.

Es seien jetzt Determinanten $\Delta_1^{(\varrho)}, \Delta_2^{(\varrho)}, \ldots, \Delta_t^{(\varrho)}$ wie in (5.7) ausgewählt. Verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie in § 5, so haben wir also

$$\Delta_\tau^{(\varrho)} = \mathrm{Det}\left(\chi_i(G_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{6.1}$$

wo i und j die l_τ Werte in S_τ durchlaufen. Man wähle eine feste Spalte, etwa die r-te Spalte und multipliziere die Elemente dieser Spalte mit $g/n(G_r)$. Nach (2.3) ist $g\,\chi_i(G_r)/n(G_r) = x_i\,\omega_i(G_r)$. Da x_i durch p^{a-d} teilbar ist und $\omega_i(G_r)$ ganz algebraisch ist, so ist $g\,\Delta_\tau^{(\varrho)}/n(G_r)$ durch p^{a-d} teilbar. Aus (6.1) folgt dann

$$\nu(G_r) \leq d. \tag{6.2}$$

Da die χ_i mit $i \in S_\tau$ alle zum Block B_τ gehören, so sind nach (4.4) die l_τ Zahlen $\omega_i(G_r)$ für die l_τ Werte $i \in S_\tau$ alle untereinander (mod $\mathfrak{p}$) kongruent. Daher kann das Gleichheitszeichen in (6.2) höchstens dann gelten, wenn $\omega_i(G_r) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ für $i \in S_\tau$ ist.

Nehmen wir nun an, daß für alle $r \in S_\tau$ das Ungleichheitszeichen in (6.2) gilt. Aus (5B) folgt dann, daß alle Elementarteiler von C kleiner als p^d sind. Dann ist $m \leq d-1$ in (5.14) und für $G=1$ ergibt sich, daß für die Grade aller $\chi_i \in B_\tau$ die Ungleichung $\nu(x_i) > a-d$ gilt. Dies widerspricht der Definition des Defekts d. Wir können also $r \in S_\tau$ so wählen, daß

$$\nu(G_r) = d, \qquad \omega_i(G_r) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{6.3}$$

ist.

Wählt man, was nach Definition von d möglich ist, den Charakter $\chi_i \in B_\tau$ zunächst so, daß $\nu(x_i) = a-d$ ist, so hat man

$$\nu\left(\omega_i(G)\right) = \nu\left(\frac{g\,\chi_i(G)}{n(G)\,x_i}\right) = a + \nu\left(\chi_i(G)\right) - \nu(G) - \nu(x_i) \geq d - \nu(G).$$

Insbesondere ist $\omega_i(G) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, falls $\nu(G) < d$ ist. Wegen (4.4) gilt dies für alle $i \in S_\tau$. Sagen wir wie in § 2, daß ein Element G den Defekt ν_0 hat, wenn $\nu(G) = \nu_0$ ist, so liefert (6.3) das folgende Resultat

(6B) *Ein irreduzibler Charakter χ_i von $\mathfrak{G}$ gehört dann und nur dann zu einem Block vom Defekt d, wenn für alle Elemente G von $\mathfrak{G}$ von einem Defekt kleiner als d die Kongruenz $\omega_i(G) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt, während es p-reguläre Elemente G vom Defekt d gibt, für die $\omega_i(G) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. (Wie immer ist ω_i der zu χ_i gehörige Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$.)*

Es sei jetzt B_τ ein Block, für den $l_\tau \geq 2$ ist und es seien r und s zwei verschiedene zu S_τ gehörige Indizes. Multipliziert man dann in (6.1) die r-te Spalte mit $g/n(G_r)$, die s-te Spalte mit $g/n(G_s)$ und drückt man in beiden

Spalten wieder die χ_i nach (2.3) durch die ω_i aus, so erhält man eine Formel

$$\frac{g}{n(G_r)}\frac{g}{n(G_s)}\Delta_\tau = |\ldots,\ x_i\omega_i(G_r),\ldots,x_i\omega_i(G_s),\ldots|,$$

wo auf der rechten Seite die i-te Zeile der Determinante angegeben ist, und wo in den nicht hingeschriebenen Spalten ganze algebraische Koeffizienten, nämlich Werte $\chi_i(G_j)$ stehen. Da alle $\chi_i \in B_\tau$ Grade x_i haben, die durch p^{a-d} teilbar sind, so kann man aus der r-ten und der s-ten Spalte je den Faktor p^{a-d} herausziehen. Ist dies geschehen, und wendet man auf die so entstehende Determinante die Restklassenabbildung (mod $\mathfrak{p}$) an, so werden nach (4.4) zwei Spalten proportional; man erhält also 0. Nach (6.1) hat man also $a-\nu(G_r)+a-\nu(G_s)>2(a-d)$, d.h.

$$\nu(G_r)+\nu(G_s)<2d. \tag{6.4}$$

Ist G_r wie in (6.3) gewählt, so hat man $\nu(G_s)<d$. Es ist also genau einer der Werte $\nu(G_j)$ mit $j\in S_\tau$ gleich d und alle anderen sind kleiner als d. Auf Grund von (5B) liefert dies

(6C) *Ist C_τ die zu einem Block vom Defekt d gehörige Teilmatrix der Matrix der Cartanschen Invarianten von $\mathfrak{G}$, so hat C_τ genau einen Elementarteiler p^d, während alle Elementarteiler kleiner als p^d sind.*

Da nach (5.5) die Elementarteiler aller C_τ zusammen bekannt sind, liefert dies Ergebnis bereits gewisse Auskunft über die Anzahl der Blöcke von gegebenem Defekt[10]). Insbesondere kann eine Zahl p^a in (5.9) nur von einem Block vom Defekt a herrühren, und jeder solche Block liefert nur einmal p^a. Wir haben also

(6D) *Die Anzahl der Blöcke B vom maximalen Defekt $a=\nu(g)$ ist gleich der Anzahl der p-regulären Klassen $\mathfrak{K}_j$ vom Defekt a.*

Im Fall $d=0$ kann C_τ überhaupt nur einen einzigen Elementarteiler haben, und dieser muß 1 sein. Man hat also $l_\tau=1$, $C_\tau=(1)$. Nach (4.5) folgt dann, daß D_τ auch nur eine einzige Zeile haben kann, da alle d_{ij} ganze rationale Zahlen sind, und keine Zeile von D_τ ausschließlich aus Nullen besteht, wie man z.B. aus (3.5) für $G=1$ sieht. So erhalten wir das Resultat

(6E) *Jeder Block vom Defekt 0 besteht aus genau einem gewöhnlichen irreduziblen Charakter und einem irreduziblen modularen Charakter. Diese beiden Charaktere stimmen für p-reguläre Elemente überein, während der erstere für alle nicht p-regulären Elemente verschwindet.*

Der letzte Teil ergibt sich aus (3F) unter Verwendung von (3.9) und $D_\tau=(1)$.

Gehört χ_i zu einem Block B vom Defekt 0, so nennen wir χ_i einen *Charakter vom Defekt* 0. Nach Definition ist der Grad x_i durch die höchst mögliche

[10]) Die folgenden Ergebnisse (6D) und (6E) finden sich in der zweiten in [3]. erwähnten Arbeit. Der Satz (6C) wurde von C. Nesbitt und dem Verfasser kurz nach dem Entstehen der Arbeiten [3]. mit einem von dem hier gegebenen verschiedenen Beweis gefunden aber nicht veröffentlicht.

Potenz p^a von p teilbar. Man kann auch die Umkehrung zeigen, daß aus $p^a | x_i$ folgt, daß χ_i zu einem Block vom Defekt 0 gehört[11]). Für eine derartige Darstellung $\mathfrak{X}_i$ ist die entsprechende modulare Darstellung $\mathfrak{X}_i^*$ irreduzibel und nach den Formeln (3.9) gleichzeitig ein direkter Summand der modularen regulären Darstellung von $\mathfrak{G}$. Daraus folgt nach der allgemeinen Theorie der Darstellungen von Algebren auch noch, daß $\mathfrak{X}_i^*$ ein direkter Summand in allen modularen Darstellungen ist, in denen es als Bestandteil auftritt. Wir werden die letzteren Tatsachen im folgenden nicht verwenden. Man sieht, daß im Fall des Defekts 0 die modulare Darstellungstheorie mit der gewöhnlichen Darstellungstheorie zusammenfällt. Im allgemeinen sind die Abweichungen um so größer, je größer der Defekt ist. Es sei noch bemerkt, daß im Fall $g \not\equiv 0 \pmod{p}$ alle Blöcke natürlich den Defekt 0 haben müssen und daß daher überhaupt kein Unterschied zwischen der modularen und der gewöhnlichen Theorie besteht.

Von Wichtigkeit für uns ist das folgende Kriterium

(6F) *Es seien χ_α und χ_β zwei irreduzible Charaktere von $\mathfrak{G}$, die beide zu Blöcken vom Defekt d gehören. Die beiden Charaktere gehören dann und nur dann zu demselben Block, wenn für alle p-regulären Elemente G vom Defekt d die Kongruenz gilt*

$$\omega_\alpha(G) \equiv \omega_\beta(G) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist nach (4.4) klar. Um die Umkehrung zu zeigen, nehmen wir an, daß χ_α zum Block B_σ und χ_β zum Block $B_\tau \neq B_\sigma$ gehört. Wir verwenden jetzt eine Methode, die ganz analog der oben beim Beweis von (6C) verwendeten ist. Es sei $B_0 = B_\sigma \cup B_\tau$ die durch Zusammenwerfen der Blöcke B_σ und B_τ entstehende Menge von gewöhnlichen und modularen Charaktere. Geht man wieder von (5.5) aus und wendet man die Laplacesche Entwicklung an, wobei jetzt B_σ und B_τ durch die eine Menge B_0 ersetzt sind, so erhält man eine zu B_0 gehörige Unterdeterminante $\Delta_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Durch weitere Entwicklung von Δ_0 sieht man, daß man annehmen darf, daß Δ_σ und Δ_σ in (5.7) komplementäre Unterdeterminanten von Δ_0 sind. Man darf also annehmen, daß die Indizes in Δ_0 gerade die Indizes in der Vereinigungsmenge $S_\sigma \cup S_\tau$ sind. Nach (6C) gibt es dann ein $r \in S_\sigma$ und ein $s \in S_\tau$ derart daß $\nu(G_r) = \nu(G_s) = d$ ist. Nach Voraussetzung ist nun $\omega_\alpha(G_r) \equiv \omega_\beta(G_r)$, $\omega_\alpha(G_s) \equiv \omega_\beta(G_s) \pmod{\mathfrak{p}}$. Daraus folgt nach (4.4), daß $\omega_i(G_r) \equiv \omega_j(G_r)$, $\omega_i(G_s) \equiv \omega_j(G_s) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $\chi_i, \chi_j \in B_0 = B_\sigma \cup B_\tau$ ist. Drückt man jetzt in Δ_0 die Koeffizienten $\chi_i(G_r)$ und $\chi_i(G_s)$ in der r-ten und s-ten Spalte durch die entsprechenden ω_i aus, so erhält man genau wie oben die Ungleichung (6.4). Wegen $\nu(G_r) = \nu(G_s) = d$ ist dies ein Widerspruch, und damit ist (6F) bewiesen.

Schließlich zeigen wir noch:

(6G) *Ist eine Anzahl h von verschiedenen Charakteren χ_i vom Defekt 0 gegeben, so kann man h p-reguläre Elemente G_j vom Defekt 0 finden, derart daß*

$$\text{Det}\,(\chi_i(G_j)) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{6.5}$$

[11]) Vgl. § 13 der zweiten in [3]. genannten Arbeit.

ist, wo in der Determinante die Indizes i und j die h Werte durchlaufen, die zu den gegebenen Charakteren χ_i, bzw. zu den h gewählten Elementen G_j gehören.

Beweis. Nach (6E) ist jeder der m Charaktere χ_i der einzige gewöhnliche Charakter in seinem Block. Weiter folgt dann aus (5A), daß die h Charaktere χ_i in der Determinante (5.5) erscheinen. Durch Entwicklung nach den betreffenden Zeilen erhält man eine Unterdeterminante h-ten Grades, die die Bedingung (6.5) erfüllt. Wir haben zu zeigen, daß die hier auftretenden G sämtlich den Defekt 0 haben. Wäre eine der Zahlen $\nu(G_j)$ positiv, so folgte aus (2.3), daß $\chi_i(G_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle unsere χ_i gilt, da $\omega_i(G_j)$ ganz algebraisch und g/x_i zu p teilerfremd ist. Dann wäre aber (6.5) unmöglich. Also haben alle G_j in (6.5) den Defekt 0.

§ 7. Zuordnung der Blöcke von $\mathfrak{G}$ zu Blöcken von Untergruppen

Es sei wie immer $\mathfrak{G}$ eine Gruppe endlicher Ordnung g, und p sei eine fest gewählte Primzahl. Wir betrachten Untergruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

(*) Für jedes $T \in \mathfrak{T}$ gibt es eine p-Untergruppe $\mathfrak{P}_T$ von $\mathfrak{N}(T) \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{T})$, derart daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_T) \subseteq \mathfrak{T}$ gilt.

(**) $$\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{T}).$$

Die Existenz derartiger Untergruppen $\mathfrak{T}$ ergibt sich aus der Bemerkung

(7A) *Ist $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so genügt $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ der Bedingung (*). Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$, die $\mathfrak{T}$ enthält, so ist (**) erfüllt.*

In der Tat, ist T ein Element von $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$, so kann man $\mathfrak{P}_T = \mathfrak{Q}$ wählen. Da $\mathfrak{T}$ invariant in $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ ist, ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q}) \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{T})$, also $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{T})$.

Die Gruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$ in (7A) sind die einzigen Gruppen, für die die folgenden Betrachtungen angewendet werden.

(7B) *Es sei Ξ ein Körper der Charakteristik p, und es seien $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die den Bedingungen (*) und (**) genügen. Für jede Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ sei wie früher K_α das Element der Gruppenalgebra $\Gamma(\mathfrak{G}, \Xi)$, das die Summe der Elemente in $\mathfrak{K}_\alpha$ ist; es sei $K_\alpha^{(1)}$ die Summe der Elemente in $\mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{T}$[12]). Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus H der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ von $\mathfrak{G}$ in die Klassenalgebra $Z(\mathfrak{H}, \Xi)$ von $\mathfrak{H}$, der K_α auf $K_\alpha^{(1)}$ abbildet.*

Beweis. Offenbar besteht $\mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{T}$ aus vollen Klassen von $\mathfrak{H}$, und daher kann $K_\alpha^{(1)}$ als Element von $Z(\mathfrak{H}, \Xi)$ betrachtet werden. Man setze $K_\alpha = K_\alpha^{(1)} + K_\alpha^{(2)}$, so daß also $K_\alpha^{(2)}$ die Summe der nicht in $\mathfrak{T}$ liegenden Elemente von $\mathfrak{K}_\alpha$ ist. Ist die Multiplikation der K_α durch die Formel (2.2) gegeben, so haben wir

$$(K_\alpha^{(1)} + K_\alpha^{(2)})(K_\beta^{(1)} + K_\beta^{(2)}) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}(K_\gamma^{(1)} + K_\gamma^{(2)}).$$

[12]) Gibt es kein derartiges Element, so ist $K_\alpha^{(1)} = 0$ zu setzen.

Man betrachte hier beide Seiten als Summen von Elementen von $\mathfrak{G}$ und vergleiche die Koeffizienten der in $\mathfrak{T}$ liegenden Elemente. Offenbar besteht $K_\alpha^{(1)} K_\beta^{(1)}$ ausschließlich aus solchen Elementen, während in $K_\alpha^{(1)} K_\beta^{(2)}$ und in $K_\alpha^{(2)} K_\beta^{(1)}$ nur außerhalb $\mathfrak{T}$ liegende Elemente auftreten. Können wir also zeigen, daß jedes in $K_\alpha^{(2)} K_\beta^{(2)}$ erscheinende Element von $\mathfrak{T}$ einen durch p teilbaren Koeffizienten hat, so ergibt der Koeffizientenvergleich, daß in $Z(\mathfrak{H}, \Xi)$ die Gleichung gilt

$$K_\alpha^{(1)} K_\beta^{(1)} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma^{(1)}. \tag{7.1}$$

Da die K_α eine Basis von $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ bilden, zeigt Vergleich mit (2.2), daß die durch $K_\alpha \to K_\alpha^{(1)}$ definierte lineare Abbildung H von $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ in $Z(\mathfrak{H}, \Xi)$ ein Homomorphismus ist.

Die Vielfachheit N, mit der ein Element T von $\mathfrak{T}$ in $K_\alpha^{(2)} K_\beta^{(2)}$ auftritt, ist offenbar die Anzahl der geordneten Paare (X, Y) von Elementen von $\mathfrak{G}$, die den Bedingungen genügen

$$XY = T; \quad X \in \mathfrak{K}_\alpha; \quad X \notin \mathfrak{T}; \quad Y \in \mathfrak{K}_\beta; \quad Y \notin \mathfrak{T}.$$

Ist nun P ein Element der Gruppe $\mathfrak{P}_T$ in (*), so erfüllt mit (X, Y) auch das Paar $(P^{-1} X P,\ P^{-1} Y P)$ die gleichen Bedingungen. Nennen wir also zwei Paare (X, Y) und (X', Y') äquivalent, wenn es ein P in $\mathfrak{P}_T$ mit $X' = P^{-1} X P,\ Y' = P^{-1} Y P$ gibt, so sind unsere N Paare auf Äquivalenzklassen verteilt. Die (X, Y) enthaltende Äquivalenzklasse besteht offenbar aus $\left(\mathfrak{P}_T : \mathfrak{P}_T \cap \mathfrak{N}(X) \cap \mathfrak{N}(Y)\right)$ verschiedenen Paaren. Dieser Gruppenindex ist eine Potenz von p. Wäre er 1, so wäre $\mathfrak{P}_T \subseteq \mathfrak{N}(X)$, also $X \in \mathfrak{C}(\mathfrak{P}_T)$, daher wegen (*) $X \in \mathfrak{T}$. Da dies einen Widerspruch darstellt, ist der Gruppenindex und dann auch N durch p teilbar. Das ist aber, was wir zu zeigen hatten, und damit ist (7B) bewiesen.

Als Zusatz haben wir

(7C) *Ist* $\mathfrak{U}$ *der Kern des Homomorphismus* H *in* (7B), *so besteht eine Basis von* $\mathfrak{U}$ *aus denjenigen* K_α, *für die* $\mathfrak{K}_\alpha$ *keine Elemente von* $\mathfrak{T}$ *enthält. Eine Basis des Bildes* $\mathfrak{V}$ *von* $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ *in* $Z(\mathfrak{H}, \Xi)$ *besteht aus den von* 0 *verschiedenen* $K_\alpha^{(1)}$.

Dabei hat man nur zu beachten, daß die verschiedenen $K_\alpha^{(1)} \neq 0$ sicher linear unabhängig sind, da sich zwei verschiedene von ihnen aus gänzlich verschiedenen Elementen zusammensetzen.

In der eben eingeführten Bezeichnung haben wir

$$Z(\mathfrak{G}, \Xi)/\mathfrak{U} \cong \mathfrak{V} \subseteq Z(\mathfrak{H}, \Xi). \tag{7.2}$$

Wir wählen jetzt für Ξ den Körper Ω^* aus § 2. Ist ψ ein linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, dessen Kern das Ideal $\mathfrak{U}$ enthält, so kann man ψ als linearen Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)/\mathfrak{U}$ betrachten. Durch Anwendung des Isomorphismus in (7.2) erhält man daraus einen linearen Charakter der Teilalgebra $\mathfrak{V}$ von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$, und dieser kann dann zu einem linearen Charakter $\tilde{\psi}$ von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*$

erweitert werden[13]). Geht man umgekehrt von einem linearen Charakter $\tilde{\psi}$ von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$ aus, so erhält man durch Beschränkung einen linearen Charakter von $\mathfrak{N}$. Mit Hilfe von (7.2) ergibt sich daraus ein linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)/\mathfrak{U}$, und dieser kann als linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ gedeutet werden, dessen Kern $\mathfrak{U}$ enthält. In dieser Weise erkennen wir:

(7D) *Die linearen Charaktere $\tilde{\psi}$ von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$ entsprechen eineindeutig den linearen Charakteren ψ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, deren Kern das Ideal $\mathfrak{U}$ in* (7C) *(für $\Xi = \Omega^*$) enthält. Für zugeordnete Charaktere $\tilde{\psi}$ und ψ gilt*

$$\psi(K_\alpha) = \tilde{\psi}(K_\alpha^{(1)}) = \sum_\varrho \tilde{\psi}(L_\varrho), \tag{7.3}$$

wo auf der rechten Seite $\mathfrak{L}_\varrho$ über diejenigen Klassen von $\mathfrak{H}$ läuft, die in $\mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{T}$ liegen, und wo L_ϱ die Summe der Elemente in $\mathfrak{L}_\varrho$ ist.

Wie wir in § 4 gesehen haben, entsprechen die linearen Charaktere der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ den Blöcken von $\mathfrak{G}$. Ebenso entsprechen die linearen Charaktere der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$ den Blöcken von $\mathfrak{H}$. Daher folgt:

(7E) *Auf Grund der Zuordnung $\tilde{\psi} \to \psi$ in* (7D) *entspricht jedem Block $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ ein Block B von $\mathfrak{G}$. Dabei ist $\tilde{\psi}$ der dem Block $\tilde{B}$ zugeordnete lineare Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$ und ψ der dem Block B zugeordnete lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$.*

Ist χ_i ein zum Block B gehöriger Charakter von $\mathfrak{G}$, und ist ω_i wie immer durch (2.3) definiert, so ist $\psi = \omega_i^*$. Ähnlich kann man $\tilde{\psi}$ durch einen zu $\tilde{B}$ gehörigen Charakter $\tilde{\chi}_i$ von $\mathfrak{H}$ ausdrücken. Setzt man dies in (7.3) ein, so erhält man nach einfacher Umformung das Ergebnis:

(7F) *Ist χ_i vom Grad x_i ein irreduzibler Charakter des Blocks B von $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\chi}_j$ vom Grad $\tilde{x}_j$ ein irreduzibler Charakter des Blocks $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ in* (7E), *so gilt für jedes Element G von $\mathfrak{G}$ die Kongruenz*[14])

$$\chi_i(G) \equiv \frac{n(G)}{g} \frac{x_i}{\tilde{x}_j} \sum \tilde{\chi}_j(H) \pmod{\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{p}^{\nu(G) - \nu(g/x_i)}}, \tag{7.4}$$

wo H über alle Elemente von $\mathfrak{T}$ läuft, die in $\mathfrak{G}$ zu G konjugiert sind. Gibt es keine derartigen Elemente, so ist die Summe gleich 0 zu setzen.

§ 8. Die Defektgruppe eines Blockes B

Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$ vom Defekt d. Es sei ψ der dem Block B zugeordnete lineare Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$. Aus (6B) folgt, daß es Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ vom Defekt d gibt, für die $\psi(K_\alpha) \neq 0$ ist. Ist G ein Element einer derartigen Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ und ist $\mathfrak{D}$ eine p-Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(G)$, so nennen wir $\mathfrak{D}$ eine *Defektgruppe* des Blocks B. Es ist dann klar,

[13]) Vgl. § 14, (14A).

[14]) Die Bedeutung dieser Kongruenz ist natürlich folgendermaßen gemeint: Ist δ die Differenz der linken und rechten Seite von (7.4), so ist

$$\nu(\delta) > \nu(G) - \nu(g/x_i).$$

daß jede zu $\mathfrak{D}$ konjugierte Gruppe ebenfalls eine Defektgruppe von B ist. Da $\nu(G)=d$ ist, hat jede Defektgruppe die Ordnung p^d.

(8A) *Ist ψ der dem Block B zugeordnete lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, und ist $\psi(K_\beta) \neq 0$ für eine Klasse $\mathfrak{K}_\beta$, so enthält der Normalisator $\mathfrak{N}(G_\beta)$ eines jeden Elementes G_β von $\mathfrak{K}_\beta$ eine Defektgruppe von B.*

Beweis. Es sei wie oben die Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ derart gewählt, daß $\psi(K_\alpha) \neq 0$ ist, und daß $\mathfrak{K}_\alpha$ den Defekt d hat. Ist die Multiplikation der K_i wie immer durch (2.2) definiert, so hat man

$$\psi(K_\alpha)\,\psi(K_\beta) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\,\psi(K_\gamma).$$

Ist also $\psi(K_\beta) \neq 0$, so muß es einen Index γ geben, für den

$$a_{\alpha\beta\gamma} \not\equiv 0 \pmod{p}; \qquad \psi(K_\gamma) \neq 0 \tag{8.1}$$

ist. Es sei G_γ ein Element von $\mathfrak{K}_\gamma$ und $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung p^r eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G_\gamma)$. Dann muß also $\nu(G_\gamma)=r$ sein. Aus der zweiten Bedingung (8.1) folgt nach (6B), daß $d \leqq r$ ist.

Jetzt nehme man $\mathfrak{T}=\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$. Wie wir in (7A) gesehen haben, sind dann die Bedingungen (*) und (**) erfüllt, und daher gelten die Resultate von § 7. Nach (7.1) ist also

$$K_\alpha^{(1)}\,K_\beta^{(1)} = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\,K_\gamma^{(1)}.$$

Nun ist $G_\gamma \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{K}_\gamma$ also $K_\gamma^{(1)} \neq 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der von 0 verschiedenen $K_i^{(1)}$ müssen $K_\alpha^{(1)}$ und $K_\beta^{(1)}$ beide von 0 verschieden sein. Daher gibt es ein Element G_α in $\mathfrak{K}_\alpha$ und ein Element G_β in $\mathfrak{K}_\beta$, die zu $\mathfrak{T}$ gehören. Dann ist $\mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{N}(G_\alpha)$ und $\mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{N}(G_\beta)$. Da $\nu(G_\alpha)=d$ ist und $\mathfrak{Q}$ die Ordnung p^r hat, muß $d \geqq r$ und also $d=r$ sein. Folglich ist $\mathfrak{Q}$ eine Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G_\alpha)$ und, da $\psi(K_\alpha) \neq 0$ war, ist $\mathfrak{Q}$ eine Defektgruppe von B. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{N}(G_\beta)$ eine Defektgruppe von B enthält. Das gleiche gilt dann für den Normalisator jedes zu G_β konjugierten Elements, wie zu beweisen war.

Ist $\mathfrak{D}$ eine beliebige Defektgruppe von B, so gibt es nach Definition eine Klasse $\mathfrak{K}_\beta$ mit $\psi(K_\beta) \neq 0$, derart daß $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(G)$ eines Elements G von $\mathfrak{K}_\beta$ ist. Dann muß also $\nu(G)=d$ sein. Wählt man eine feste Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ vom Defekt d mit $\psi(K_\alpha) \neq 0$ und wendet die Methode im Beweis von (8A) an, so sieht man, daß es eine Sylowgruppe $\mathfrak{Q}$ eines Normalisators $\mathfrak{N}(G_\alpha)$ mit $G_\alpha \in \mathfrak{K}_\alpha$ gibt, derart daß $\mathfrak{Q}$ zum Normalisator von Elementen G_β von $\mathfrak{K}_\beta$ gehört. Dann muß $\mathfrak{Q}$ die Ordnung p^d haben und also Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G_\beta)$ sein. Da G_β und G als Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_\beta$ konjugiert sind, sind die Sylowgruppen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{D}$ ihrer Normalisatoren konjugiert. Damit haben wir gezeigt, daß eine beliebige Defektgruppe $\mathfrak{D}$ zu den Sylowgruppen der Normalisatoren der Elemente einer festen Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ konjugiert sind. Wir haben also bewiesen:

(8B) *Je zwei Defektgruppen eines Blocks B sind konjugiert.*

Wir zeigen weiter:

(8C) *Ist B ein Block von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$, und setzt man $\mathfrak{T}=\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, so gibt es einen Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{H}$, dem B im Sinn von (7E) zugeordnet ist.*

Beweis. Es sei ψ der zu B gehörige lineare Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$. Ist $\psi(K_\beta)\neq 0$ für eine Klasse $\mathfrak{K}_\beta$, so folgt aus (8A), daß $\mathfrak{K}_\beta$ Elemente G enthält, für die $\mathfrak{T}\subseteqq\mathfrak{N}(G)$ ist. Dann ist $G\in\mathfrak{C}(\mathfrak{D})=\mathfrak{T}$, also $\mathfrak{K}_\beta\cap\mathfrak{T}$ nicht leer und $K_\beta^{(1)}\neq 0$. Ist daher $K_\beta^{(1)}=0$, so muß $\psi(K_\beta)$ verschwinden. In der Bezeichnung von (7C) enthält also der Kern von ψ das Ideal $\mathfrak{U}$. Jetzt zeigt (7D), daß es einen linearen Charakter $\widetilde{\psi}$ von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$ gibt, dem ψ zugeordnet ist, und daraus ergibt sich die Behauptung.

(8D) *Sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{H}$ zwei beliebige Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die die Bedingungen (*) und (**) von § 7 erfüllen, und ist $\widetilde{B}$ ein Block von $\mathfrak{H}$, dem der Block B von $\mathfrak{G}$ im Sinn von (7E) entspricht, so ist die Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ in einer Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B enthalten. Insbesondere ist der Defekt $\tilde{d}$ von $\widetilde{B}$ höchstens gleich dem Defekt d von B.*

Beweis. Nach Definition der Defektgruppe gibt es eine Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ vom Defekt d, für die $\psi(K_\alpha)\neq 0$ für den zu B gehörigen linearen Charakter ψ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ ist. Der zu $\widetilde{B}$ gehörige lineare Charakter $\widetilde{\psi}$ von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$ ist mit ψ durch die Formel (7.3) verbunden. Daraus folgt, daß es eine in $\mathfrak{K}_\alpha\cap\mathfrak{T}$ enthaltene Klasse $\mathfrak{L}_\varrho$ von $\mathfrak{H}$ gibt, für die $\widetilde{\psi}(L_\varrho)\neq 0$ ist. Ist G ein Element von $\mathfrak{L}_\varrho$, so zeigt Anwendung von (8A) auf die Gruppe $\mathfrak{H}$, daß der Normalisator $\mathfrak{N}(G)\cap\mathfrak{H}$ von G in $\mathfrak{H}$ eine Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ enthält. Dann gehört $\widetilde{\mathfrak{D}}$ zu einer Sylowgruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{N}(G)$, und da $G\in\mathfrak{K}_\alpha$ ist, ist $\mathfrak{D}$ eine Defektgruppe von B. Der letzte Teil der Behauptung folgt aus $(\mathfrak{D}:1)=p^d$, $(\widetilde{\mathfrak{D}}:1)=p^{\tilde{d}}$.

§ 9. Gruppen mit invarianten p-Untergruppen

Wir unterbrechen jetzt unsere allgemeinen Betrachtungen und behandeln den speziellen Fall einer Gruppe $\mathfrak{G}$, die eine invariante Untergruppe $\mathfrak{M}$ enthält. Speziell sind wir an dem Fall interessiert, daß $\mathfrak{M}$ eine p-Gruppe ist, da die Ergebnisse später auf die Gruppe $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ in (8C) an Stelle von $\mathfrak{G}$ angewendet werden sollen. Die Untersuchung ist dabei etwas weitergeführt, als es für unsere Zwecke unbedingt nötig ist.

Wir bezeichnen die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach der invarianten Untergruppe $\mathfrak{M}$ mit $\overline{\mathfrak{G}}$;

$$\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{M}. \tag{9.1}$$

Ist G ein Element von $\mathfrak{G}$, so sei stets $\overline{G}=G\mathfrak{M}$ das entsprechende Element von $\overline{\mathfrak{G}}$.

(9A) *Für $G\in\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{N}(G)\mathfrak{M}/\mathfrak{M}$ eine Untergruppe des Normalisators $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{G})$ von $\overline{G}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$. Die Ordnung $\overline{n}(\overline{G})$ von $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{\mathfrak{G}})$ ist teilbar durch $n(G)/z$, wo z die Ordnung von $\mathfrak{N}(G)\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{Z}$ ist.*

Der erste Teil der Behauptung ist klar. Der zweite Teil folgt daraus, daß $\mathfrak{N}(G)\mathfrak{M}/\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}(G)/\mathfrak{Z}$ die Ordnung $n(G)/z$ hat.

Jeder Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$ kann als Charakter von $\mathfrak{G}$ aufgefaßt werden, dessen Kern die Gruppe $\mathfrak{M}$ enthält. In diesem Sinn behaupten wir:

(9B) *Jeder Block $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist in einem Block B von $\mathfrak{G}$ enthalten.*

Beweis. Wir setzen $m = (\mathfrak{M}:1)$. Ist χ_i ein gewöhnlicher irreduzibler Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$, so definieren wir $\overline{\omega}_i$ in Analogie mit (2.3) durch

$$\overline{\omega}_i(\overline{G}) = \frac{g}{m\,\overline{n}(\overline{G})} \frac{\chi_i(\overline{G})}{x_i}, \quad \left(x_i = \chi_i(1)\right).$$

Betrachten wir χ_i jetzt als irreduziblen Charakter von $\mathfrak{G}$ und hat ω_i die alte Bedeutung (2.3), so ist also

$$\omega_i(G) = \frac{m\,\overline{n}(\overline{G})}{n(G)} \overline{\omega}_i(\overline{G}), \tag{9.2}$$

da wir $\chi_i(G) = \chi_i(\overline{G})$ zu setzen haben. Aus (9A) folgt, daß $\overline{n}(\overline{G})\, m/n(G)$ ganz ist, da ja z ein Teiler von m ist.

Gehören nun zwei irreduzible Charaktere χ_i und χ_j von $\overline{\mathfrak{G}}$ zum selben Block $\overline{B}$, so ist nach (4.4) $\overline{\omega}_i(\overline{G}) \equiv \overline{\omega}_j(\overline{G}) \pmod{\mathfrak{p}}$ für jedes G in $\mathfrak{G}$. Dann zeigt (9.2), daß $\omega_i(G) \equiv \omega_j(G) \pmod{\mathfrak{p}}$ für jedes G in $\mathfrak{G}$ ist. Daraus folgt, daß χ_i und χ_j als Charaktere von $\mathfrak{G}$ zum selben Block B gehören. Ist $\mathfrak{X}_i$ die Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit dem Charakter χ_i, so kann man die irreduziblen modularen Darstellungen von $\overline{B}$ als die in den Darstellungen $\mathfrak{X}_i^*$ für $\mathfrak{X}_i \in \overline{B}$ wirklich auftretenden irreduziblen Bestandteile $\mathfrak{F}_j$ definieren; vgl. (4D). Faßt man jetzt alle diese Darstellungen als Darstellungen von $\mathfrak{G}$ auf, so sieht man, daß alle $\mathfrak{F}_j \in \overline{B}$ zu B gehören, und damit ist (9B) bewiesen.

(9C) *Hat B in* (9B) *die Defektgruppe $\mathfrak{D}$, so enthält $\mathfrak{D}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{M}$. Die Untergruppe $\mathfrak{M}\mathfrak{D}/\mathfrak{M}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält eine Defektgruppe $\overline{\mathfrak{D}}$ von $\overline{B}$, und daher ist der Defekt $\bar{d}$ von $\overline{B}$ höchstens gleich $d - \nu(m)$.*

Beweis. Ist χ_i ein zu $\overline{B}$ und also zu B gehöriger Charakter, und ist ψ der B entsprechende lineare Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, so ist $\omega_i^* = \psi$, § 4. Nach Definition der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ gibt es Elemente $G \in \mathfrak{G}$ vom Defekt d, derart daß $\psi(K_\alpha) \neq 0$ ist, wobei $\mathfrak{K}_\alpha$ die G enthaltende Klasse ist. Dann ist $\omega_i(G) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Aus (9.2) folgt dann

$$\nu(m) + \nu\left(\overline{n}(\overline{G})\right) = \nu\left(n(G)\right) = d; \quad \overline{\omega}_i(\overline{G}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{9.3}$$

Da nach (9A) $\nu\left(\overline{n}(\overline{G})\right) \geqq \nu\left(n(G)\right) - \nu(z) \geqq \nu\left(n(G)\right) - \nu(m)$ ist, muß $\nu(z) = \nu(m)$ sein. Jede Sylowgruppe $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{Z}$ ist daher auch Sylowgruppe von $\mathfrak{M}$. Wegen $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{N}(G)$ kann man annehmen, daß $\mathfrak{P}_0$ in einer Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G)$, d.h. in einer Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B enthalten ist. Offenbar enthält dann auch jede zu $\mathfrak{D}$ konjugierte Gruppe eine Sylowgruppe von $\mathfrak{M}$. Aus dem zweiten Teil von (9.3) ergibt sich ferner nach (8A), daß jede Sylowgruppe von $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{G})$ eine Defektgruppe $\overline{\mathfrak{D}}$ von $\overline{B}$ enthält. Nach dem ersten Teil von (9.3) hat eine solche Sylowgruppe die Ordnung $p^{d-\nu(m)}$. Offenbar hat die Untergruppe

$\mathfrak{N}\mathfrak{D}/\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{N}(\overline{G})$ diese Ordnung, ist also Sylowgruppe, und daher kann man $\overline{\mathfrak{D}} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{D}/\mathfrak{M}$ annehmen, wie behauptet war.

Von jetzt an setzen wir voraus, daß die invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe ist.

(9D) *Enthält $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung p^μ, so ist $\mathfrak{M}$ in dem Kern jeder irreduziblen modularen Darstellung $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten.*

Beweis. Beschränkt man in der Darstellung $\mathfrak{T}$ das Argument auf $\mathfrak{M}$, so erhält man eine Darstellung von $\mathfrak{M}$, die nach einem Satz von A. H. Clifford[15]) vollständig reduzibel ist. Nun ist die einzige irreduzible modulare Darstellung einer p-Gruppe die Einsdarstellung [z. B. nach (3B)]. Daher ist $\mathfrak{T}(M)$ die Identität für jedes $M \in \mathfrak{M}$, und daraus ergibt sich die Behauptung.

(9E) *Enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung p^μ, so enthält jeder Block B von $\mathfrak{G}$ vom Defekt d mindestens einen Block $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ vom Defekt $\bar{d} = d - \mu$. Alle in B enthaltenen Blöcke von $\overline{\mathfrak{G}}$ haben höchstens den Defekt $d - \mu$.*

Beweis. Nach (6A) kann man in B eine irreduzible modulare Darstellung $\mathfrak{T}$ finden, deren Grad f die Primzahl p genau mit dem Exponenten $\nu(g) - d$ enthält. Nach (9D) kann man $\mathfrak{T}$ als Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ betrachten. Gehört dann $\mathfrak{T}$ zu dem Block $\overline{B}$ vom Defekt $\bar{d}$, so muß f durch $p^{\nu(g)-\mu-\bar{d}}$ teilbar sein, da die Ordnung von $\overline{\mathfrak{G}}$ die Primzahl p mit dem Exponenten $\nu(g) - \mu$ enthält. Dies liefert $d \leq \bar{d} + \mu$.

Andererseits ist nach (9C) der Defekt eines beliebigen in B enthaltenen Blocks von $\overline{\mathfrak{G}}$ höchstens gleich $d - \mu$. Dies liefert die letzte Behauptung in (9E). Für $\bar{d}$ ergibt sich jetzt, daß $\bar{d} = d - \mu$ ist, und damit ist auch der erste Teil von (9E) bewiesen.

Wir heben noch den folgenden speziellen Fall unserer Ergebnisse hervor:

(9F) *Enthält $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung p^μ, so ist $\mathfrak{M}$ in der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ jedes Blocks B von $\mathfrak{G}$ enthalten, und daher ist der Defekt d von B mindestens gleich μ.*

Da nämlich der Block B von $\mathfrak{G}$ nach (9E) einen Block $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält, kann man (9C) anwenden. Da $\mathfrak{M}$ seine eigene Sylowgruppe ist, ergibt sich $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}$ und daraus $\mu \leq d$.

§ 10. Der Hauptsatz

Wir brauchen den folgenden Hilfssatz:

(10A) *Es sei $\mathfrak{D}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und es werde $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ gesetzt. Gibt es in einer Klasse $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{G}$ Elemente G, für die $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(G)$ ist, so enthält $\mathfrak{K}_i$ genau eine aus Elementen von $\mathfrak{T}$ bestehende Klasse $\mathfrak{L}_j$ von $\mathfrak{H}$. Ist H ein Element von $\mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ von H in $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H)$, und daher kann die erste Behauptung auf die Klasse $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{G}$ angewendet werden, in der H liegt.*

[15]) Clifford, A. H.: Ann. of Math. **38**, 533—550 (1937). Vgl. auch H. Weyl, The classical groups. Princeton 1939.

Beweis. Ist $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{N}(G)$, so ist $G \in \mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, und daher enthält die Klasse $\mathfrak{K}_i$ von G Elemente von $\mathfrak{T}$. Ist G' ein zweites Element von $\mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{T}$, so kann man $G' = X^{-1}GX$ mit $X \in \mathfrak{G}$ setzen. Wegen $G' \in \mathfrak{T}$, ist $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{N}(G')$, und da $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G)$ ist, so ist $\mathfrak{D}$ ebenfalls Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G')$. Da $X^{-1}\mathfrak{D}X$ zu $\mathfrak{N}(X^{-1}GX) = \mathfrak{N}(G')$ gehört, ist $X^{-1}\mathfrak{D}X$ auch Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G')$ und daher zu $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{N}(G')$ konjugiert. Man kann also ein Element Y in $\mathfrak{N}(G')$ finden, so daß $X^{-1}\mathfrak{D}X = Y^{-1}\mathfrak{D}Y$ ist. Dann gehört XY^{-1} zu $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, und da XY^{-1} das Element G in G' transformiert, so gehören G und G' zu derselben Klasse von $\mathfrak{H}$. Damit ist der erste Teil von (10A) bewiesen.

Es sei H ein Element von $\mathfrak{H}$, für das $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ ist, und es sei $\mathfrak{D}_1$ eine $\mathfrak{D}$ enthaltende Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H)$. Wäre $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}$, so gäbe es nach bekannten Sätzen über p-Gruppen Elemente M in $\mathfrak{D}_1$, die zu $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{H}$, aber nicht zu $\mathfrak{D}$ gehören. Dann wäre $\{M, \mathfrak{D}\}$ eine von $\mathfrak{D}$ verschiedene p-Gruppe, die in $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ enthalten ist. Dies ist ein Widerspruch, da dann $\mathfrak{D}$ nicht Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ wäre. Also ist $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H)$, wie behauptet war.

Jetzt sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen, der das Hauptergebnis dieser Arbeit darstellt:

(10B) *Es sei $\mathfrak{D}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz p^d von p ist. Man setze $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$. Dann besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Blöcken B von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ und den Blöcken $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d. Dabei ist B dem Block $\tilde{B}$ im Sinn von § 7 zugeordnet, so daß die Formeln (7.3) und (7.4) gelten. Die Blöcke $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d besitzen $\mathfrak{D}$ als Defektgruppe.*

Beweis. Ist B ein Block von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$, so gibt es nach (8C) einen Block $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$, dem B im Sinn von § 7 zugeordnet ist. Aus (8D) ergibt sich, daß der Defekt $\tilde{d}$ von $\tilde{B}$ höchstens gleich dem Defekt von B ist. Da aber B eine Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von der Ordnung p^d hat, hat B den Defekt d; es ist also $\tilde{d} \leq d$. Die Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ hat eine invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung p^d. Wendet man also (9F) auf die Gruppe $\mathfrak{H}$ an Stelle von $\mathfrak{G}$ an, so sieht man, daß der Defekt $\tilde{d}$ von $\tilde{B}$ mindestens gleich d ist. Damit ist gezeigt, daß $\tilde{d} = d$ ist. Der eben verwendete Hilfssatz (9F) zeigt auch noch, daß jeder Block von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d die Defektgruppe $\mathfrak{D}$ besitzt.

Es sei $\tilde{B}$ ein beliebiger Block von $\mathfrak{H}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Ist $\tilde{\psi}$ der zu $\tilde{B}$ gehörige lineare Charakter der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$, so kann man also eine Klasse $\mathfrak{L}_j$ von $\mathfrak{H}$ und ein Element H in $\mathfrak{L}_j$ so wählen, daß $\tilde{\psi}(L_j) \neq 0$ ist, und daß $\mathfrak{D}$ eine Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ von H in $\mathfrak{H}$ ist. Aus (10A) folgt dann, daß $\mathfrak{D}$ dann auch Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H)$ selbst ist, und weiter, daß wenn H in $\mathfrak{G}$ zur Klasse $\mathfrak{K}_i$ gehört, man $\mathfrak{L}_j = \mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{T}$ hat.

Für gegebenes $\tilde{\psi}$ definieren die Formeln (7.3) einen linearen Charakter ψ der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$. Dieser gehört zu dem Block B von $\mathfrak{G}$, der dem Block $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ nach § 7 zugeordnet ist. Wendet man die Formeln (7.3)

auf die Klasse $\mathfrak{K}_i$ an, so hat man nach dem eben Bewiesenen

$$\psi(K_i) = \tilde{\psi}(L_j). \tag{10.1}$$

Da $\tilde{\psi}(L_j) \neq 0$ war, ist $\psi(K_i) \neq 0$. Dann folgt aber aus (8A), daß $\mathfrak{N}(H)$ eine Defektgruppe von B enthält. Nach (8D) ist der Defekt von B mindestens gleich dem Defekt d von $\tilde{B}$. Da aber $\mathfrak{D}$ von der Ordnung p^d eine Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H)$ ist, so muß B den Defekt d haben und $\mathfrak{D}$ Defektgruppe von B sein.

Nehmen wir jetzt an, daß es noch einen zweiten Block $\tilde{B}_1$ von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d gäbe, dem derselbe Block B von $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist; es sei $\tilde{\psi}_1$ der zu $\tilde{B}_1$ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{H}, \Omega^*)$. Dann hat auch $\tilde{B}_1$ die Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Es sei $\mathfrak{L}_j$ eine Klasse von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d in $\mathfrak{H}$. Gibt es in $\mathfrak{L}_j$ kein Element H, für das $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ von H in $\mathfrak{H}$ ist, so folgt aus (8A) daß $\tilde{\psi}(L_j) = 0$ und ebenso, daß $\tilde{\psi}_1(L_j) = 0$ ist. Gibt es in $\mathfrak{L}_j$ Elemente H, für die $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(H) \cap \mathfrak{H}$ ist, so gilt (10.1) und ebenso $\psi(K_i) = \tilde{\psi}_1(L_j)$, da ja B ebenfalls dem Block $\tilde{B}_1$ von $\mathfrak{H}$ zugeordnet ist; beim Beweis von (10.1) wurde die Bedingung $\tilde{\psi}(L_j) \neq 0$ nicht verwendet. Damit haben wir gezeigt, daß für alle Klassen $\mathfrak{L}_j$ von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d die Gleichung

$$\tilde{\psi}(L_j) = \tilde{\psi}_1(L_j)$$

gilt. Dann folgt aber durch Anwendung von (6F) auf $\mathfrak{H}$, daß $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1$, also $\tilde{B} = \tilde{B}_1$ ist, und damit ist (10B) in allen Teilen bewiesen.

Im Fall $d = 0$ ist unser Resultat (10B) inhaltslos, da hier $\mathfrak{D} = \{1\}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ ist. Es sei $d > 0$. Will man alle Blöcke vom Defekt d finden, so hat man zunächst ein volles System von nicht-konjugierten Untergruppen $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung p^d aufzustellen. Selbstverständlich kann man alle $\mathfrak{D}$ in einer festen Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ wählen. Für jedes $\mathfrak{D}$ muß man dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ bilden und alle Blöcke $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d finden. Ist $\mathfrak{D}$ nicht invariant in $\mathfrak{G}$, so handelt es sich bei $\mathfrak{H}$ um eine Gruppe von kleinerer Ordnung als g. Wir werden aber in § 12 sehen, daß man die Behandlung von $\mathfrak{H}$ stets auf die von $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$ zurückführen kann, das jedenfalls kleinere Ordnung als $\mathfrak{G}$ hat. Damit wird dann gezeigt sein, daß die Aufstellung aller Blöcke mit gegebener Defektgruppe $\mathfrak{D} \neq \{1\}$ auf eine Untersuchung von Gruppen kleinerer Ordnung zurückgeführt werden kann.

Nicht jede Untergruppe der Ordnung p^d kann als Defektgruppe auftreten. Wir zeigen:

(10C) *Ist die Untergruppe $\mathfrak{D}$ von der Ordnung p^d Defektgruppe, so gibt es p-reguläre Elemente G von $\mathfrak{G}$, für die $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G)$ ist. Ferner kann $\mathfrak{D}$ nicht in einer invarianten p-Untergruppe $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ enthalten sein.*

Ist $\mathfrak{D}$ Defektgruppe des Blocks B, und verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie früher, so zeigt (6B) daß es p-reguläre Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ vom Defekt d gibt, für die $\psi(K_\alpha) \neq 0$ ist. Dann ist $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G)$ für geeignete

$G \in \mathfrak{K}_\alpha$. Gibt es eine invariante p-Untergruppe $\mathfrak{D}_1 > \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{H}$, so enthält jede Defektgruppe eines Blocks $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ nach (9F) die Gruppe $\mathfrak{D}_1$, und daher besitzt $\mathfrak{H}$ keine Blöcke vom Defekt d.

§ 11. Fortsetzung von § 9

Nehmen wir an, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{W}$ enthält. Ist ϑ ein Charakter von $\mathfrak{W}$ und G ein festes Element von $\mathfrak{G}$, so stellt für variables W in $\mathfrak{W}$ die Funktion $\vartheta_1(W) = \vartheta(GWG^{-1})$ wieder einen Charakter ϑ_1 von $\mathfrak{W}$ dar. Mit ϑ ist auch ϑ_1 irreduzibel. Wir sagen, daß die Charaktere ϑ und ϑ_1 von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{G}$ *assoziiert* sind. Offenbar ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Elemente G von $\mathfrak{G}$, für die $\vartheta(W) = \vartheta(GWG^{-1})$ für alle W in $\mathfrak{W}$ gilt, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{W}$ von $\mathfrak{G}$, die *Trägheitsgruppe* von ϑ in $\mathfrak{G}$. Die Anzahl r der verschiedenen zu ϑ in $\mathfrak{G}$ assoziierten Charaktere ist gleich dem Index $(\mathfrak{G}:\mathfrak{S})$.

Ist χ_i ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{G}$, so hat die Beschränkung $\chi_i^{(0)}$ von χ_i auf $\mathfrak{W}$ die Form

$$\chi_i^{(0)} = q \sum_{i=1}^{r} \vartheta_i, \tag{11.1}$$

wo $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ eine Klasse von in $\mathfrak{G}$ assoziierten Charakteren von $\mathfrak{W}$ bilden, und wo q eine natürliche Zahl ist. Hat ϑ den Grad t, so ergibt sich durch Gradvergleich die Gleichung

$$x_i = qrt. \tag{11.2}$$

Wir nehmen jetzt an, daß $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung p^d besitzt. Wir wollen die Blöcke B von $\mathfrak{G}$ untersuchen, die die Defektgruppe $\mathfrak{D}$ haben. Setzt man

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D}), \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{T}\mathfrak{D}, \tag{11.3}$$

so sind auch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{W}$ invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Wie aus (9E) folgt, ist in B ein Block $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ vom Defekt $d - d = 0$ enthalten. Es sei χ_i der gewöhnliche irreduzible Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$ in B; wir betrachten wieder χ_i auch als Charakter von $\mathfrak{G}$. Ist $\nu(g) = a$, so teilt p die Ordnung von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit dem Exponenten $a - d$, und daher hat man

$$\nu(x_i) = a - d. \tag{11.4}$$

Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie früher. Nach Definition der Defektgruppe gibt es Elemente G, für die $\mathfrak{D}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{N}(G)$ ist, derart daß $\psi(K_\alpha) \not\equiv 0$ für die G enthaltende Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ von $\mathfrak{G}$ ist. Dann ist $\nu(G) = d$, und wir haben $G \in \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{T}$. Da $\psi = \omega_i^*$ ist, so folgt daß $\omega_i(G) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Aus (2.3) folgt weiter wegen (11.4), daß $\chi_i(G) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Wendet man jetzt (11.1) an, so erhält man zunächst

$$q \not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{11.5}$$

Da $\mathfrak{D}$ im Kern von χ_i enthalten ist, so ist $\mathfrak{D}$ auch im Kern von jedem ϑ_ϱ enthalten, und deswegen kann ϑ_ϱ als irreduzible Darstellung von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ betrachtet werden. Daher teilt der Grad t von ϑ_ϱ die Ordnung von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$. Hat $\mathfrak{W}$ die Ordnung w, so liefert dies $\nu(t) \leq \nu(w) - d$. Andererseits folgt aus (11.2) wegen (11.4) und (11.5), daß

$$a - d = \nu(x_i) = \nu(r) + \nu(t)$$

ist. Also muß $a \leq \nu(r) + \nu(w)$ sein. Da $r = (\mathfrak{G} : \mathfrak{E})$ war und $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{W}$ ist, ist dies nur möglich, wenn wir

$$\nu\big((\mathfrak{E} : \mathfrak{W})\big) = 0; \qquad \nu(t) = \nu(w) - d \tag{11.6}$$

haben. Aus der zweiten Gl. (11.6) folgt, daß jedes ϑ_ϱ als Charakter von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ zu einem Block vom Defekt 0 gehört.

Umgekehrt sei jetzt ϑ ein Charakter von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$, der zu einem Block von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ vom Defekt 0 gehört. Es sei $\mathfrak{Z}$ die Trägheitsgruppe von ϑ in $\mathfrak{G}$, und es werde vorausgesetzt, daß $(\mathfrak{Z} : \mathfrak{W})$ zu p teilerfremd ist. Dann gilt also (11.6). Ist $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ein rechtsseitiges Restsystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{Z}$, und setzt man

$$\vartheta_i(W) = \vartheta(X_i W X_i^{-1}) \qquad (\text{für } W \in \mathfrak{W}), \tag{11.7}$$

so sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ die verschiedenen, zu ϑ in $\mathfrak{G}$ assoziierten Charaktere. Bildet man den von ϑ induzierten Charakter ζ von $\mathfrak{G}$, so ist

$$\zeta(W) = \frac{1}{w} \sum_{X \in \mathfrak{G}} \vartheta(X W X^{-1}) = (\mathfrak{Z} : \mathfrak{W}) \sum_{\varrho=1}^{r} \vartheta_\varrho(W) \qquad (\text{für } W \in \mathfrak{W}).$$

Ist χ_i ein irreduzibler, in ζ auftretender Charakter von $\mathfrak{G}$, so müssen also in der Formel (11.1) für χ_i gerade dieselben Charaktere $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ wie hier erscheinen. Da $\mathfrak{D}$ im Kern von ϑ und daher im Kern von allen ϑ_ϱ enthalten ist, gehört es auch zum Kern von ζ und dann auch von χ_i. Also kann χ_i auch als Charakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ betrachtet werden. Daher ist der Grad x_i von χ_i ein Teiler von g/p^d, also $\nu(x_i) \leq a - d$. Aus (11.1) folgt (11.2), und daraus erhalten wir unter Verwendung von (11.6) die Beziehung

$$\begin{aligned} \nu(x_i) &= \nu(q) + \nu(r) + \nu(t) = \nu(q) + \nu\big((\mathfrak{G} : \mathfrak{Z})\big) + \nu(t) \\ &= \nu(q) + \nu\big((\mathfrak{G} : \mathfrak{W})\big) + \nu(w) - d = \nu(q) + a - d. \end{aligned}$$

Daher muß $\nu(x_i) = a - d$, $\nu(q) = 0$ sein. Es gelten also wieder (11.4) und (11.5).

Es sei B der Block von $\mathfrak{G}$, zu dem χ_i gehört. Wir wollen zeigen, daß B den Defekt d hat. Dazu brauchen wir den Hilfssatz:

(11A) *Es sei $\mathfrak{D}$ eine invariante Untergruppe der Ordnung p^d von $\mathfrak{G}$ und es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}\mathfrak{D}$. Ist $\overline{T} = T\mathfrak{D}$ ein p-reguläres Element von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$, so kann man den Repräsentanten T in $T\mathfrak{D}$ als p-reguläres Element wählen. Ist dies geschehen, so ist der Normalisator $\mathfrak{N}(\overline{T})$ von $\overline{T}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ gerade $\mathfrak{N}(T)/\mathfrak{D}$.*

Beweis. Ist $\overline{T}$ p-regulär, so gibt es eine zu p teilerfremde, natürliche Zahl c, für die $\overline{T}^c = 1$ ist. Ist T ein Element der Restklasse $\overline{T}$, so ist $T^c \in \mathfrak{D}$, und da c zur Ordnung von $\mathfrak{D}$ teilerfremd ist, kann man eine Potenz

T_0 von T^c finden, für die $T_0^c = T^c$ ist. Da T und T_0 vertauschbar sind, ist $T_1 = TT_0^{-1}$ p-regulär. Offenbar ist $T_1\mathfrak{D} = T\mathfrak{D}$ und damit ist der erste Teil von (11A) bewiesen.

Ist T schon selbst p-regulär, und gehört $\overline{V} = V\mathfrak{D}$ zum Normalisator von $\overline{T}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$, so ist $V^{-1}TV \in T\mathfrak{D}$; man setze $V^{-1}TV = TD$ mit $D \in \mathfrak{D}$. Hier ist das Element auf der linken Seite p-regulär. Auf der rechten Seite ist T p-regulär, während die Ordnung von D eine Potenz von p ist. Da D und T vertauschbar sind, kann TD nur dann p-regulär sein, wenn $D = 1$, d.h. wenn $V \in \mathfrak{N}(T)$ ist. Also ist $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{T}) \subseteq \mathfrak{N}(T)/\mathfrak{D}$. Da $\mathfrak{N}(T)/\mathfrak{D}$ sicher zu $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{T})$ gehört, ist auch der zweite Teil von (11A) bewiesen.

Nach Voraussetzung ist ϑ ein Charakter vom Defekt 0 von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$. Wendet man den inneren Automorphismus $G \to XGX^{-1}$ von $\mathfrak{G}$ an, der $\mathfrak{W}$ in sich und ϑ in ϑ_i überführt, so sieht man, daß das gleiche für die r Charaktere ϑ_i gilt. Wie in (6G) gezeigt wurde, gibt es dann r p-reguläre Elemente $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_r$ von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$, derart daß

$$\text{(11.8)} \qquad \operatorname{Det}\left(\vartheta_i(\overline{T}_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

ist, und daß die Ordnung von $\overline{\mathfrak{N}}(\overline{T}_j)$ zu p teilerfremd ist. Dann zeigt (11A), daß wir T_j in der Restklasse $\overline{T}_j$ so wählen können, daß

$$\text{(11.9)} \qquad \nu(T_j) = d$$

ist.

Nach (2.3) finden wir dann unter Verwendung von (11.1) und (11.2), daß

$$\text{(11.10)} \qquad \omega_i(W) = \frac{g}{n(W)tr} \sum_{i=1}^{r} \vartheta_i(W)$$

für $W \in \mathfrak{W}$ ist. Für $W = T_j$ haben wir $\nu\left(g/(n(W)tr)\right) = \nu(g/x_i) - \nu(T_j) = 0$. Aus (11.8) folgt, daß wir nicht $\omega_i(T_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle T_j haben können. Auf Grund von (6B) ergibt sich also aus (11.9), daß der Block B von $\mathfrak{G}$ höchstens den Defekt d haben kann. Nach (9F) ist der Defekt aber nicht kleiner als d, und daher muß er genau gleich d sein, wie behauptet war. Die Defektgruppe von B ist folglich $\mathfrak{D}$.

Wie (6F) zeigt, ist der Block eindeutig durch die Werte $\omega_i^*(G)$ für p-reguläre Elemente G vom Defekt d bestimmt. Dabei darf man sich auf Elemente G beschränken, die zu Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ gehören, die Elemente T von $\mathfrak{T}$ enthalten. Für die anderen Klassen ergibt sich nämlich durch Anwendung von (10B) und (7.3) mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, daß ω_i^* verschwindet. Jetzt zeigt (11.10), daß B nur von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ abhängt.

Schließlich sei ϑ' ein Charakter von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$, der zu einem Block vom Defekt 0 gehört, aber von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ verschieden ist. Hat dann $\chi_{i'}$ die entsprechende Bedeutung für ϑ' wie χ_i für ϑ, und gehört $\chi_{i'}$ zum Block B' von $\mathfrak{G}$, so behaupten wir, daß B von B' verschieden ist. Um dies zu zeigen, hat man (6G) zur Bildung einer Determinante zu verwenden, in der die verschiedenen

zu ϑ und ϑ' assoziierten Charaktere von $\mathfrak{W}$ auftreten. Vergleicht man dann (11.10) mit der entsprechenden Formel für $\omega_{i'}$, so sieht man, daß ω_i^* für geeignete Elemente T von ω_i^* verschieden ist, und dann muß $B \neq B'$ sein.

Hat der Charakter ϑ von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ als Charakter von $\mathfrak{W}$ die Trägheitsgruppe $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$, so hat er als Charakter von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ die Trägheitsgruppe $\mathfrak{S}/\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Damit erhalten wir den Satz:

(11 B) *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, die eine invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ der Ordnung p^d besitzt. Es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}\mathfrak{D}$. Um alle Blöcke von $\mathfrak{G}$ vom Defekt d zu erhalten, hat man alle Charaktere ϑ vom Defekt 0 von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ zu finden, für die $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ in der Trägheitsgruppe $\mathfrak{S}/\mathfrak{D}$ von ϑ einen zu p teilerfremden Index hat. Verteilen sich diese Charaktere auf u Familien von in $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ assoziierten Charakteren, so gibt es u Blöcke B von $\mathfrak{G}$ vom Defekt d. Ist B der durch die Familie $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ von assoziierten Charakteren vom Grad t von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ bestimmte Block, und ist χ_i ein Charakter von $\mathfrak{G}$, so ist für Elemente $W \in \mathfrak{W}$:*

$$\chi_i(W) = \frac{x_i}{gt} \sum_{X \in \mathfrak{G}} \vartheta(XWX^{-1}). \tag{11.11}$$

Dabei erhält man (11.11) aus (11.1), indem man X über alle g Elemente von $\mathfrak{G}$ an Stelle über das Restsystem X_i laufen läßt und dementsprechend durch g/r dividiert; $qr/g = x_i/(gt)$.

§ 12. Kongruenzen für die Werte der Charaktere

Es sei wieder $\mathfrak{G}$ eine beliebige endliche Gruppe, und es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$ vom Defekt d mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Setzt man $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{T}\mathfrak{D}$, so gibt es nach (10B) einen Block $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ vom Defekt d, dem B zugeordnet ist. Ist χ_i ein Charakter von B und $\tilde{\chi}_i$ ein Charakter von $\tilde{B}$, so ist nach (7.4)

$$\chi_i(G) \equiv \frac{n(G)}{g} \frac{x_i}{\tilde{x}_j} \sum_T \tilde{\chi}_j(T) \qquad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{p}^{\nu(G) - \nu(g/x_i)}), \tag{12.1}$$

wo T über alle Elemente von $\mathfrak{T}$ läuft, die in $\mathfrak{G}$ zu G konjugiert sind. Da $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ die invariante Untergruppe $\mathfrak{D}$ hat, kann man auf $\mathfrak{H}$ das Resultat (11 B) anwenden. Ist also der Block $\tilde{B}$ von $\mathfrak{H}$ durch den Charakter ϑ von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ vom Defekt 0 bestimmt, so hat man für $\tilde{\chi}_j$ an Stelle von χ_i eine Formel (11.11):

$$\tilde{\chi}_j(T) = \frac{\tilde{x}_j}{ht} \sum_{X \in \mathfrak{H}} \vartheta(XTX^{-1}),$$

wo h die Ordnung von $\mathfrak{H}$ ist. Setzt man dies in (12.1) ein, so hat man

$$\chi_i(G) \equiv \frac{n(G)\, x_i}{ght} \sum_T \sum_{X \in \mathfrak{H}} \vartheta(XTX^{-1}) \qquad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{p}^{\nu(G) - \nu(g/x_i)}).$$

Jedes Glied in der Summe auf der rechten Seite hat die Form $\vartheta(T')$ mit $T' = XTX^{-1}$; $T \in \mathfrak{T}$ zu G in $\mathfrak{G}$ konjugiert; $X \in \mathfrak{H}$. Daher ist auch T' zu G

konjugiert und $T' \in \mathfrak{T}$. Ein festes T' wird genau h-mal in der Form XTX^{-1} erhalten. Schreibt man also für T' wieder T, so haben wir

$$\chi_i(G) \equiv \frac{n(G)}{g} \frac{x_i}{t} \sum_T \vartheta(T) \qquad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{p}^{\nu(G)-\nu(g/x_i)}), \tag{12.2}$$

wo T dieselben Werte wie in (12.1) durchläuft.

Man kann dies Resultat noch in etwas anderer Form schreiben. Der von ϑ (als Charakter von $\mathfrak{W}$) in $\mathfrak{G}$ induzierte Charakter Θ ist durch die Formel

$$w\Theta(G) = \sum_{X \in \mathfrak{G}} \vartheta(XGX^{-1})$$

definiert, wo X über die Elemente von $\mathfrak{G}$ läuft, für die $XGX^{-1} \in \mathfrak{W}$ ist, und wo w die Ordnung von $\mathfrak{W}$ ist. Man betrachte hier zunächst die Summe Σ_1 der Glieder, für die XGX^{-1} ein Element von $\mathfrak{T}$ ist. Da jedes feste T $n(G)$-mal auftritt, ist $\big(1/n(G)\big)\Sigma_1$ gerade die in (12.2) auftretende Summe.

Es sei weiter Σ_2 die Summe der übrigbleibenden Glieder,

$$\Sigma_2 = \Sigma \vartheta(XGX^{-1}); \qquad XGX^{-1} \in \mathfrak{W}, \qquad XGX^{-1} \notin \mathfrak{T}.$$

Hier setze man $XGX^{-1} = W = TD_0$ mit $T \in \mathfrak{T}$, $D_0 \in \mathfrak{D}$ und schreibe $T = AB$, wo A und B Potenzen von T sind, derart daß die Ordnung von A zu p teilerfremd ist und die von B eine Potenz von p. Dann liegen A und B in $\mathfrak{T}$, sind also mit D_0 vertauschbar. Deutet weiterhin ein Querstrich Bildung der Restklasse nach $\mathfrak{D}$ an, so haben wir

$$W = ABD_0, \qquad \overline{W} = \overline{AB}.$$

Ist nun $B \notin \mathfrak{D}$, also $\overline{B} \neq \overline{1}$, so ist $\overline{W}$ nicht p-regulär. Da ϑ ein Charakter von $\mathfrak{W}/\mathfrak{D}$ vom Defekt 0 war, ist $\vartheta(\overline{W}) = \vartheta(W) = 0$, vgl. (6E). Daher darf man sich in Σ_2 auf diejenigen Glieder beschränken, für die $XGX^{-1} = W$ die Form AD mit $D \in \mathfrak{D}$ und einem p-regulären $A \in \mathfrak{T}$ hat. Wegen $W \notin \mathfrak{T}$ muß $D \neq 1$ sein; wir haben $\vartheta(W) = \vartheta(A)$. Jedes derartige W tritt $n(G)$-mal auf. Mit jedem W fasse man die Glieder W' zusammen, die in $\mathfrak{W}$ zu W konjugiert sind. Diese erfüllen dieselben Bedingungen wie W; $W' = A'D'$ mit $D' \in \mathfrak{D}$ und p-regulären $A' \in \mathfrak{T}$, $D' \neq 1$. Ferner ist $\vartheta(W) = \vartheta(W')$. Zu jedem W gibt es $w/n_0(W)$ verschiedene W', wo $n_0(W)$ die Ordnung des Normalisators $\mathfrak{N}_0(W) = \mathfrak{N}(W) \cap \mathfrak{W}$ von W in $\mathfrak{W}$ ist. Da A und D vertauschbar sind und teilerfremde Ordnungen haben, ist A eine Potenz von W und also $\mathfrak{N}_0(W) \subseteq \mathfrak{N}_0(A) = \mathfrak{N}(A) \cap \mathfrak{W}$. Wir behaupten, daß $\nu\big(n_0(W)\big) < \nu\big(n_0(A)\big)$ ist, wo $n_0(A)$ die Ordnung von $\mathfrak{N}_0(A)$ bezeichnet.

In der Tat, würde Gleichheit bestehen, so würde eine Sylowgruppe $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{N}_0(W)$ gleichzeitig eine Sylowgruppe von $\mathfrak{N}_0(A)$ sein. Wegen $A \in \mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ gibt es Sylowgruppen von $\mathfrak{N}_0(A)$, die $\mathfrak{D}$ enthalten. Da $\mathfrak{D}$ invariant in $\mathfrak{W}$ ist, enthalten also alle Sylowgruppen von $\mathfrak{N}_0(A)$ die Gruppe $\mathfrak{D}$. Man hätte also $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}_0 \subseteq \mathfrak{N}_0(W)$, was $W \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{T}$ zur Folge hätte; wir hatten aber $W \notin \mathfrak{T}$ in Σ_2. Also ist $\nu\big(n_0(W)\big) < \nu\big(n_0(A)\big)$, wie behauptet war.

Schließlich ist $w\,\vartheta(A)/(n_0(A)\,t)$ ganz algebraisch, also

$$\nu\big(\vartheta(A)\big)+\nu(w)\geqq\nu\big(n_0(A)\big)+\nu(t)>\nu\big(n_0(W)\big)+\nu(t).$$

Faßt man all dies zusammen, so ergibt sich, daß für die Summe Σ_2' der zu einem gegebenen W gehörigen Glieder $\vartheta(W')$ die Beziehung gilt

$$\nu(\Sigma_2')\geqq\nu(G)+\nu(w)-\nu\big(n_0(W)\big)+\nu\big(\vartheta(A)\big)>\nu(G)+\nu(t).$$

Da Σ_2 eine Summe von Teilsummen Σ_2' ist, ist

$$\nu(\Sigma_2)>\nu(G)+\nu(t).$$

Wir können nun (12.2) in der Form schreiben

$$\chi_i(G)\equiv\frac{1}{g}\frac{x_i}{t}\left(w\,\Theta(G)-\Sigma_2\right)\pmod{\mathfrak{p}_\nu\,p^{\nu(G)-\nu(g/x_i)}}.$$

Jetzt sieht man, daß man hier das Glied Σ_2 weglassen darf. Wir haben damit das folgende Resultat bewiesen

(12A) *Es sei $\mathfrak{T}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz p^d der Primzahl p ist; es sei $\mathfrak{T}=\mathfrak{C}(\mathfrak{T})$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(\mathfrak{T})$. Man bestimme ein volles System von Charakteren $\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots$ von $\mathfrak{T}\mathfrak{D}/\mathfrak{D}$ vom Defekt 0, derartig daß ϑ_i in $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$ eine Trägheitsgruppe $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{D}$ hat, für die der Index $(\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{T}\mathfrak{D})$ zu p teilerfremd ist. In diesem System finde man ein vollständiges Teilsystem $\vartheta^{(1)},\vartheta^{(2)},\ldots,\vartheta^{(u)}$ von Charakteren ϑ_τ von denen keine zwei in $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$ assoziiert sind. Jedem $\vartheta^{(\varrho)}$ kann man dann einen Block $B^{(\varrho)}$ von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ zuordnen, und alle Blöcke B von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ werden genau einmal in der Form $B^{(\varrho)}$ erhalten. Ist χ_t ein gewöhnlicher irreduzibler Charakter in $B^{(\varrho)}$, so ist*[16])

$$\chi_i(G)\equiv\frac{1}{(\mathfrak{G}:\mathfrak{T}\mathfrak{D})}\frac{x_i}{t^{(\varrho)}}\,\Theta^{(\varrho)}(G)\pmod{\mathfrak{p}_\nu\,p^{\nu(G)-\nu(g/x_i)}}. \tag{12.3}$$

Hier bezeichnet $\Theta^{(\varrho)}$ den von $\vartheta^{(\varrho)}$ induzierten Charakter von $\mathfrak{G}$, wobei $\vartheta^{(\varrho)}$ wieder als Charakter von $\mathfrak{T}\mathfrak{D}$ aufzufassen ist; x_i ist der Grad von χ_i und $t^{(\varrho)}$ der von $\vartheta^{(\varrho)}$.

§ 13. Über die Anzahl der Blöcke vom Defekt 0

Wie bereits bemerkt, versagen unsere Methoden im Fall der Blöcke vom Defekt 0. Daher entsteht die Aufgabe, die Bestimmung der Anzahl der Blöcke vom Defekt 0 zu diskutieren. Sind die Grade x_i der irreduziblen Charaktere χ_i bekannt, so kann man unmittelbar ablesen, welche von ihnen durch die volle Potenz p^a von p in g teilbar sind. Die Anzahl dieser x_i ist dann die gesuchte Anzahl M. Natürlich ist M vollständig durch die Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G},\Omega^*)$ bestimmt. Das folgende Resultat (13A) drückt dies in einer

[16]) Die Bedeutung der Kongruenz (12.3) ist wieder die folgende: Ist δ die Differenz der linken und rechten Seite von (12.3), so ist

$$\nu(\delta)>\nu(G)-\nu(g/x_i).$$

konkreteren Form aus. Wir sind aber nicht in der Lage, die Bestimmung von M ähnlich wie im Fall eines positiven Defekts durchzuführen.

(13A) *Die Elemente K_α der Klassenalgebra $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, die zu Klassen $\mathfrak{K}_\alpha'$ vom Defekt 0 gehören, bilden die Basis einer Teilalgebra U. Die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{G}$ vom Defekt 0 ist gleich der Dimension von U^n für genügend großes n.*

Beweis. Für jede p-Untergruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ liefert Anwendung von (7C) mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ ein Ideal $\mathfrak{U}(\mathfrak{D})$ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, dessen Basis aus denjenigen K_α besteht, für die $\mathfrak{K}_\alpha \cap \mathfrak{T}$ leer ist. Offenbar ist dann U der Durchschnitt aller dieser $\mathfrak{U}(\mathfrak{D})$ mit $\mathfrak{D} \neq (1)$. Dies zeigt, daß U ein Ideal von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ und daher jedenfalls eine Teilalgebra ist.

Jeder lineare Charakter ψ_0 von U kann zu einem linearen Charakter ψ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ erweitert werden. Gehörte hier ψ zu einem Block B von positivem Defekt, so würde nach (6B) ψ für alle K_α verschwinden, für die $\mathfrak{K}_\alpha$ Defekt 0 hat. Dann würde ψ für alle Elemente von U verschwinden, was unmöglich ist. Daher muß ψ zu einem Block vom Defekt 0 gehören.

Geht man umgekehrt von einem Block B vom Defekt 0 aus, so zeigt (6G), daß das zugehörige ψ nicht in U identisch verschwindet und ferner, daß zwei derartige ψ nicht dieselbe Beschränkung auf U haben können. Dies zeigt, daß die Anzahl M der Blöcke von $\mathfrak{G}$ vom Defekt 0 gleich der Anzahl der verschiedenen linearen Charaktere von U ist.

Es sei weiter ψ_0 ein linearer Charakter von U und ψ seine Erweiterung zu einem linearen Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$. Da ψ zu einem Block B von $\mathfrak{G}$ vom Defekt 0 gehört, so folgt aus (6E) und dem in § 4 Gesagten, daß ψ nur ein einziges Mal als irreduzibler Bestandteil in der regulären Darstellung $\mathfrak{R}$ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ auftritt. Ist $\mathfrak{R}_0$ die Beschränkung von $\mathfrak{R}$ auf U, so tritt dann ψ_0 nur ein einziges Mal in $\mathfrak{R}_0$ auf, da ψ eindeutig durch ψ_0 bestimmt war. Nun ist die reguläre Darstellung $\mathfrak{R}_U$ von U ein Bestandteil von $\mathfrak{R}_0$. Es folgt also, daß die reguläre Darstellung $\mathfrak{R}_U$ der kommutativen Algebra U jeden ihrer M linearen Charaktere ψ_0 mit der Vielfachheit 1 enthält. Dann zeigt aber die Strukturtheorie der Algebren, daß U direkte Summe des Radikals von U und von M Idealen ist, die als Algebren zu Ω^* isomorph sind. Daraus ergibt sich, daß U^n für genügend großes n in der Tat die Dimension M hat.

§ 14. Anhang: Bemerkungen über Algebren

Um die Arbeit möglichst unabhängig zu machen, geben wir hier einige Bemerkungen über Algebren, die wir aber nur so weit verfolgen, wie es in unserem Zusammenhang nötig ist. In § 14 bezeichnet Γ eine Algebra endlichen Ranges über einem Grundkörper Ω.

(a) Unter einem Ideal $\mathfrak{M}$ von Γ wird stets ein zweiseitiges Ideal verstanden. Ein Ideal $\mathfrak{M} \neq \Gamma$ ist ein *Primideal*, wenn ein Produkt $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ zweier Ideale $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ von Γ nur dann in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, falls mindestens einer der Faktoren in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Ist Γ halbeinfach und also direkte Summe $\Gamma = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$ von Idealen, die einfache Ringe sind, so sieht man sofort,

daß man genau s Primideale hat. Dies sind die Ideale $\mathfrak{P}_j = \sum_{\lambda \neq j} B_\lambda$. Ist Γ nicht halbeinfach und ist N das Radikal, so folgt aus der Nilpotenz des Radikals leicht, daß N in jedem Primideal von Γ enthalten ist. Ist $\Gamma \neq N$, hat also z.B. Γ ein Einheitselement, so sind die Primideale von Γ gerade diejenigen Ideale, die bei dem natürlichen Homomorphismus von Γ auf Γ/N den Primidealen von ΓN entsprechen. Daraus ergibt sich, daß jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von Γ maximal in Γ ist; die Umkehrung ist trivial. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal von Γ, so ist $\Gamma/\mathfrak{P}$ eine einfache Algebra und hat daher genau eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{H}$ (wobei ähnliche Darstellungen als nicht verschieden betrachtet sind). Dann kann $\mathfrak{H}$ als irreduzible Darstellung von Γ mit dem Kern $\mathfrak{P}$ betrachtet werden. Umgekehrt ist der Kern einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{H}$ von Γ notwendig ein maximales Ideal $\mathfrak{P}$ in Γ. Es besteht also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{H}$ von Γ und den Primidealen $\mathfrak{P}$ von Γ. Dabei ist jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{H}$ der Kern $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ zugeordnet.

(b) Hat eine von der Nulldarstellung verschiedene Darstellung φ von Γ den Grad 1, so sprechen wir auch von einem *linearen Charakter* von Γ. Diese linearen Charaktere können dann also auch als die Homomorphismen der Algebra Γ auf Ω definiert werden.

Aus dem Schurschen Lemma ergibt sich leicht, daß jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{H}$ von Γ als Bestandteil in der regulären Darstellung $\mathfrak{R}$ von Γ auftritt. Ist Γ kommutativ, so folgt aus dem Schurschen Lemma weiter, daß nach einer geeigneten Grundkörpererweiterung alle irreduziblen Darstellungen von Γ den Grad 1 haben. Gilt dies bereits für den Grundkörper Ω, so sagen wir, daß Ω *Zerfällungskörper* von Γ ist. Dann zerfällt also die reguläre Darstellung $\mathfrak{R}$ von Γ in Bestandteile ersten Grades (nicht notwendig vollständig).

(14A) *Ist Γ eine kommutative Algebra, für die der Grundkörper Zerfällungskörper ist, so bildet jeder von Null verschiedene Homomorphismus ψ von Γ in einen Erweiterungskörper von Ω notwendig Γ auf Ω ab; es ist also ψ ein linearer Charakter von Γ. Ist B eine Teilalgebra von Γ, so kann jeder lineare Charakter von B zu einem linearen Charakter von Γ erweitert werden.*

Beweis. Bildet ψ die Algebra Γ auf den Körper $\Omega_1 \supseteq \Omega$ ab, so hat Ω_1 notwendig endlichen Grad m über Ω. Da Ω_1 als Algebra über Ω eine irreduzible Darstellung m-ten Grades hat, so kann man ψ selbst als irreduzible Darstellung m-ten Grades von Γ deuten. Nach Voraussetzung ist Ω Zerfällungskörper von Γ und also ist $m = 1$, d.h. $\Omega_1 = \Omega$.

Es sei $\mathfrak{R}^0$ die durch Beschränkung der regulären Darstellung $\mathfrak{R}$ von Γ auf die Teilalgebra B entstehende Darstellung von B. Es zerfällt also $\mathfrak{R}^0$ in Bestandteile ersten Grades. Diese Bestandteile sind die durch Beschränkung der Darstellungen ersten Grades von Γ entstehenden Darstellungen von B.

Ist $\tilde{\mathfrak{R}}$ die reguläre Darstellung von B, so sieht man sofort, daß $\tilde{\mathfrak{R}}$ als Bestandteil von $\mathfrak{R}^0$ aufgefaßt werden kann. Jeder lineare Charakter von B

ist ein Bestandteil von $\tilde{\mathfrak{R}}$, also von $\mathfrak{R}^0$, und ist daher die Beschränkung eines linearen Charakters φ von Γ auf B.

Damit ist (14A) bewiesen. Natürlich kann man auch einen direkten Beweis geben.

(c) Es sei Γ eine Algebra mit Einheitselement; wir fassen Ω als Teilkörper des Zentrums von Γ auf. In Ω sei ein fester Teilring $\mathfrak{i}$ gewählt, der das Einheitselement 1 enthält und Ω als Quotientenkörper besitzt. Unter einer *Ordnung* von Γ verstehen wir eine Teilmenge J, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(I) J ist ein Teilring von Γ; $1 \in J$.

(II) J ist ein $\mathfrak{i}$-Modul, der endlich erzeugt werden kann.

(III) J ist nicht in einer eigentlichen Teilalgebra von Γ enthalten.

Sprechen wir von einem Ideal von J, so meinen wir stillschweigend ein zweiseitiges Ideal, das von Null verschiedene Elemente von $\mathfrak{i}$ enthält.

Es sei $\mathfrak{T}$ eine Darstellung der Algebra Γ durch lineare Transformationen eines Vektorraumes V über Ω. Wählt man eine Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ von V, so wird jede lineare Transformation $\mathfrak{T}(\alpha)$, $(\alpha \in \Gamma)$, durch eine Matrix $[\mathfrak{T}(\alpha)]$ mit Koeffizienten in Ω gegeben. Man erhält so eine Darstellung $[\mathfrak{T}]$ von Γ durch Matrizen. Man sagt, daß $[\mathfrak{T}]$ ganzzahlig für J ist, wenn jedes $[\mathfrak{T}(\alpha)]$ mit $\alpha \in J$ Koeffizienten in $\mathfrak{i}$ hat. Offenbar ist dies dann und nur dann der Fall, wenn der von $e_1, e_2, \ldots, e_n$ erzeugte $\mathfrak{i}$-Modul U durch alle linearen Transformationen $\mathfrak{T}(\alpha)$ mit $\alpha \in J$ in sich abgebildet wird. Schreibt man $v\alpha$ für das Bild eines Vektors $v \in V$ für die lineare Transformation $\mathfrak{T}(\alpha)$, so ist U ein J-Modul.

(d) Wir setzen weiter voraus, daß $\mathfrak{i}$ ein Hauptidealring ist, was für unsere Zwecke ausreicht. Dann besitzt jede Ordnung J eine $\mathfrak{i}$-Basis. Ist $\mathfrak{T}$ eine Darstellung von Γ und ist $e_1^{(0)}, \ldots, e_n^{(0)}$ eine Ω-Basis des zugrunde liegenden Vektorraumes V, so sei U der von den $e_i^{(0)}$ erzeugte J-Modul. Offenbar kann dann U auch als $\mathfrak{i}$-Modul endlich erzeugt werden und besitzt daher auch eine $\mathfrak{i}$-Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Diese bildet dann auch eine Ω-Basis von V. Legt man diese Basis bei der Bildung von $[\mathfrak{T}]$ zugrunde, so wird also $[\mathfrak{T}]$ eine ganzzahlige Darstellung von J. In jeder Klasse ähnlicher Darstellungen von Γ gibt es also ganzzahlige Darstellungen von J.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{i}$; der Restklassenkörper $\mathfrak{i}/\mathfrak{p}$ werde mit Ω^* bezeichnet. Man sieht leicht, daß $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{p}J = \mathfrak{p}$ ist und daß $J^* = J/\mathfrak{p}J$ eine Algebra über Ω^* ist.

(e) Ist $[\mathfrak{T}]$ eine ganzzahlige Darstellung von J, so führt die Restklassenabbildung von $\mathfrak{i} \pmod{\mathfrak{p}}$ diese in eine Darstellung $\mathfrak{T}^*$ von J^* in Ω^* über. Wir zeigen

(14B) *Es sei* $\mathfrak{i}$ *der Ring* $\mathfrak{o}_\nu$ *der für die diskrete Bewertung* ν *des Körpers* Ω *ganzen Zahlen, und es sei* $\mathfrak{p}$ *das zugehörige Primideal. Sind* $[\mathfrak{T}_1]$ *und* $[\mathfrak{T}_2]$ *zwei ähnliche ganzzahlige Darstellungen der Ordnung* J, *so haben die zugehörigen*

„modularen" Darstellungen $\mathfrak{T}_1^*$ und $\mathfrak{T}_2^*$ dieselben irreduziblen Bestandteile (natürlich als Darstellungen von J^* im Körper Ω^*).

Beweis. Es gehöre etwa $[\mathfrak{T}_1]$ zu dem J-Modul U_1 und $[\mathfrak{T}_2]$ zu dem J-Modul U_2, die beide demselben Vektorraum V angehören, und die beide den Ω-Modul V aufspannen. Es sei π eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl. Da man U_2 durch cU_2 mit c in Ω, $c \neq 0$ ersetzen kann, so dürfen wir annehmen, daß $U_2 \subseteqq U_1$ ist. Ferner gibt es eine natürliche Zahl r, derart daß $\pi^r U_1 \subseteqq U_2$ ist;

$$\pi^r U_1 \subseteqq U_2 \subseteqq U_1.$$

Der Darstellungsraum für $\mathfrak{T}_1^*$ kann als $U_1/\pi U_1$ und der für $\mathfrak{T}_2^*$ als $U_2/\pi U_2$ gewählt werden. Man setze

$$X_m = (U_2 \cap \pi^m U_1) + \pi U_2; \qquad Y_m = (U_1 \cap \pi^{1-m} U_2) + \pi U_1.$$

Dann ist

$$U_2 = X_0 \supseteqq X_1 \supseteqq \cdots \supseteqq X_{r+1} = \pi U_2,$$
$$\pi U_1 = Y_0 \subseteqq Y_1 \subseteqq \cdots \subseteqq Y_{r+1} = U_1.$$

Die Faktorgruppen X_m/X_{m+1} und Y_{m+1}/Y_m können als J^*-Moduln betrachtet werden. In diesem Sinne zerfällt die Darstellung $\mathfrak{T}_1^*$ in $U_1/\pi U_1$ in die Darstellungen von J^*, die zu den von (0) verschiedenen Moduln Y_{m+1}/Y_m gehören. Ebenso zerfällt $\mathfrak{T}_2^*$ in die Darstellungen, die zu den von (0) verschiedenen Moduln X_m/X_{m+1} gehören. Können wir also zeigen, daß die J-Moduln Y_{m+1}/Y_m und X_m/X_{m+1} isomorph sind,

$$X_m/X_{m+1} \simeq Y_{m+1}/Y_m, \tag{14.1}$$

so sind wir fertig.

Wendet man nun das Zassenhaussche Lemma[17]) auf die J-Gruppen $\mathfrak{u} = \pi U_2$, $\mathfrak{U} = U_2$, $\mathfrak{v} = \pi^{m+1} U_1$, $\mathfrak{V} = \pi^m U_1$, an, so ergibt sich

$$\frac{X_m}{X_{m+1}} = \frac{(U_2 \cap \pi^m U_1) + \pi U_2}{(U_2 \cap \pi^{m+1} U_1) + \pi U_2} \simeq \frac{(\pi^m U_1 \cap U_2) + \pi^{m+1} U_1}{(\pi^m U_1 \cap \pi U_2) + \pi^{m+1} U_1}.$$

Bildet man weiter $(\pi^m U_1 \cap U_2) + \pi^{m+1} U_1$ durch den J-Isomorphismus $\xi \to \pi^{-m}\xi$ ab, so erhält man als Bild $(U_1 \cap \pi^{-m} U_2) + \pi U_1 = Y_{m+1}$, während der Teilmodul $(\pi^m U_1 + \pi U_2) + \pi^{m+1} U_1$ in $(U_1 \cap \pi^{1-m} U_2) + \pi U_1 = Y_m$ übergeht. Daher ist der Quotient auf der rechten Seite in unserer Beziehung zu Y_{m+1}/Y_m isomorph. Jetzt sieht man, daß (14.1) zunächst als J-Isomorphismus und dann auch als J^*-Isomorphismus gilt, und damit ist (14B) bewiesen.

Man kann den Beweis von (14B) auch leicht führen, indem man entweder zusammengehörige Basen der J-Moduln U_1 und U_2 verwendet oder auch, indem man die Elementarteilertheorie auf eine $[\mathfrak{T}_1]$ in $[\mathfrak{T}_2]$ transformierende Matrix anwendet.

(f) Schließlich zeigen wir

(14C) *Es sei Γ eine kommutative halbeinfache Algebra über dem Körper Ω, der Zerfällungskörper von Γ sei. Der Ring $\mathfrak{i}$ sei der Ring der für die diskrete*

[17]) ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, S. 51. Leipzig u. Berlin 1937.

Bewertung v von Ω ganzen Zahlen, und es sei $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal von $\mathfrak{i}$. Ist J eine Ordnung von Γ, so ist $\Omega^* = \mathfrak{i}/\mathfrak{p}$ Zerfällungskörper für die Ω^*-Algebra $J^* = J/\mathfrak{p}J$ und jeder lineare Charakter von J^* geht aus einem linearen Charakter von Γ durch Restklassenbildung hervor.

Beweis. Wählt man eine $\mathfrak{i}$-Basis von J zur Bildung der regulären Darstellung $\mathfrak{R}$ von Γ, so ist $[\mathfrak{R}]$ eine ganzzahlige Darstellung von J. Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die verschiedenen linearen Charaktere von Γ, so ist $[\mathfrak{R}]$ ähnlich zu der Darstellung $[\mathfrak{R}_1]$, die vollständig in $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ zerfällt. Da jede Darstellung $[\omega_i]$ ganzzahlig ist [z.B. nach dem in (d) Gezeigten], so gilt das gleiche für $[\mathfrak{R}_1]$. Jetzt zeigt (14B), daß $\mathfrak{R}^*$ die irreduziblen Bestandteile $\omega_1^*, \ldots, \omega_n^*$ besitzt, die alle Grad 1 haben. Offenbar ist $\mathfrak{R}^*$ die reguläre Darstellung von J^*. Da jeder lineare Charakter ψ von J^* in ihr als Bestandteil auftritt, stimmt ψ mit einem der ω_i^* überein. Damit ist (14C) vollständig gezeigt.

Dept. of Mathematics, Harvard University, Cambridge 38, Mass. (U.S.A.)

(Eingegangen am 24. August 1955)

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung

Von Dr. phil. **Adalbert Duschek**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien, und Dr. techn. **August Hochrainer**, Direktor im Hochspannungsinstitut der AEG., Kassel. In drei Teilen.

Im Juni 1955 erschien:

Teil III: **Anwendungen in Physik und Technik.** Mit 25 Textabbildungen. VI, 250 Seiten 8°. 1955. Steif geheftet DM 24.—

Inhaltsübersicht: **Mechanik des Massenpunktes.** Kinematik des Punktes. Dynamik des Massenpunktes. — **Mechanik des Punktsystems.** — **Mechanik des starren Körpers.** — **Spezielle Bewegungen starrer Körper.** Elastische Aufstellung des starren Körpers. — **Elastizitätstheorie.** — **Mechanik der Flüssigkeiten I.** Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik). Kinematik der Flüssigkeiten. — **Mechanik der Flüssigkeiten II (Hydrodynamik).** — **Vektorielle Doppelfelder.** Das wirbel- und quellenfreie Doppelfeld. — **Das Wärmefeld.** — **Das elektrostatische Feld.** — **Das magnetische Feld.** — **Das elektrische Feld.** — **Das elektromagnetische Feld.** — **Quasistationäre elektromagnetische Vorgänge.** — **Schnell veränderliche elektromagnetische Felder.** — **Spezielle Relativitätstheorie.** Die Lorentztransformation. Diskussion der Lorentztransformation. Relativistische Mechanik und Elektrodynamik. — **Allgemeine Relativitätstheorie.** Die Krümmung des Riemannschen Raumes. Die Einsteinsche Gravitationstheorie. — **Spezielle Lösungen der Gravitationsgleichungen.** Die Schwarzschildsche Lösung der Gleichung $R_{\alpha\beta}=0$. Die Geodätischen der W_4. Planetenbewegung und Perihelverschiebung. Die Ablenkung der Lichtstrahlen. Die sphärische Welt von De Sitter. Die Einsteinsche Welt.

Teil I: **Tensoralgebra.** Dritte Auflage. Unveränderter Abdruck der zweiten Auflage. Mit 26 Textabbildungen. VI, 129 Seiten 8°. 1954. Steif geheftet DM 12.—

Aus den Besprechungen zur zweiten Auflage: „... Das Werk wendet sich bewußt nicht nur an den Mathematiker und Physiker, sondern vor allem an den Ingenieur in den Forschungs- und Berechnungsabteilungen der Industrie. In Teil I wird die Tensoralgebra von der Vektoralgebra aus entwickelt, wobei von der sonst gebräuchlichen Vektordarstellung abgegangen und konsequent von der Tensorschreibweise Gebrauch gemacht wird, so daß von vornherein die Vektoren als Tensoren erster Stufe erscheinen und sich zwanglos Tensoren höherer Stufe einführen lassen ..." *VDI-Zeitschrift*

Teil II: **Tensoranalysis.** Mit 64 Textabbildungen. VII, 338 Seiten 8°. 1950. Steif geheftet DM 24.80

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Physik der Sternatmosphären

mit besonderer Berücksichtigung der Sonne

Von Dr. **Albrecht Unsöld**, Professor für theoretische Physik an der Universität Kiel. Zweite Auflage. Mit 257 Abbildungen, IX, 866 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 168.—

Inhaltsübersicht: **I. Die Sternatmosphäre im thermischen Gleichgewicht.** Strahlungstheorie. — Anwendung des Planckschen Gesetzes auf die Strahlung der Sonne. Strahlungsmessungen. — Die Strahlung der Sterne. — Thermische Ionisation und Anregung. — **II. Kontinuierliches Spektrum und Aufbau einer Sternatmosphäre.** Strahlungsaustausch. — Strahlungsgleichgewicht. — Kontinuierliche Absorption und Streuung. — Der Aufbau der Sternatmosphären. — **III. Messung der Intensitätsverteilung in den Fraunhofer-Linien.** Messung der Profile und Äquivalentbreiten von Fraunhofer-Linien. — **IV. Physikalische Grundlagen der Theorie der Fraunhofer-Linien.** Dämpfung (insbesondere Strahlungsdämpfung) und Dopplereffekt. — Druckverbreiterung und Druckverschiebung von Spektrallinien. — Quantenmechanische Berechnung von Linienstärken, Übergangswahrscheinlichkeiten und Oszillatorenstärken. — Experimentelle Bestimmung von Oszillatorenstärken. Laboratoriums-Untersuchungen über Strahlungsdämpfung sowie Druckverbreiterung und -verschiebung von Spektrallinien. — Literatur über astrophysikalisch wichtige Linienstärken, Übergangswahrscheinlichkeiten und Oszillatorenstärken einzelner Elemente. — **V. Die Entstehung der Fraunhofer-Linien.** Strahlungsaustausch und Fraunhofer-Linien. — Theorie der Wachstumskurven. — Quantitative Deutung der Fraunhofer-Linien in den Spektren der Sonne und „normaler" Sterne. — Beeinflussung der Linienprofile durch Rotation und Expansion der Sterne. — Klassifikation der Sternspektren. — **VI. Physik der Sonne.** Die Struktur der äußeren Schichten der Sonne. — Der Sonnenrand. Chromosphäre, Korona und Protuberanzen. — **VII. Radiofrequenzstrahlung und kosmische Ultrastrahlung.** Radioastronomie. — Kosmische Ultrastrahlung und Radiofrequenzstrahlung. — **Anhang:** Naturkonstanten und Zahlenwerte. — Klassifikation der Linienspektren. — Über die Integralexponentialfunktionen. — **Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.